

第一章 函数、极限与连续部分测试卷 (正宗老南师专转本课后习题)

一. 单项选择题 (每小题4分, 共24分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则 ().

- A. 对任意的函数 $\varphi(x)$, 都有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = 0$ 成立.
 B. 仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ 时, 才有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = 0$ 成立.
 C. 仅当 $\varphi(x)$ 为常数时, 才有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = 0$ 成立.
 D. 当 $\varphi(x)$ 有界时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = 0$ 成立.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}} =$ ().

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8.

3. $f(x) = \frac{x(x-1)}{\sin \pi x}$ 具有 ().

- A. 无穷多个第一类间断点 B. 一个跳跃间断点 C. 两个可去间断点 D. 三个可去间断点

4. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha \sim \beta$, 则 $\alpha - \beta$ 是 () 的无穷小.

- A. 比 α 高阶 B. 比 α 低阶 C. 与 α 同阶 D. 与 α 等价

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+b)x+b}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}} & x \neq 1 \\ 4 & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续, 则 a, b 的值为 ().

- A. $a=4, b=2$ B. $a=4, b=-2$ C. $a=-4, b=2$ D. $a=-4, b=-2$.

6. 下列极限正确的是 ().

- A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$ C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ 不存在 D. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

二. 填空题 (每小题4分, 共24分)

7. 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $ae^x + be^{-x} - xe^x$ 与 $\sin x$ 是等价无穷小, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $x=2$ 连续, 且 $f(2)=4$, 则 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{1}{x^2} + \frac{\arcsin x^2}{x \ln(1+x)} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设 $f(x) = 3x+5$, 则 $f[f(x)-2] = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ 的间断点为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三. 计算题 (每小题 8 分, 共 64 分)

13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} \right)^{3x}$.

14. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^2 \tan x}$.

16. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

17. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{\arcsin x \cdot (1-\cos x)}$.

18. 求 a, b 的值, 使得 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小.

19. 讨论 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & x > 1 \end{cases}$ 在 $x=0, x=1$ 处的连续性.

20. 求函数 $f(x) = \frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点, 并指出其类型.

四. 综合题 (每小题 10 分, 共 20 分)

21. 求 $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$ 的间断点, 并指出其类型.

22. 设 $f(x) = \frac{px^2-2}{x^2+1} + 3qx+5$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, p, q 取何值时 $f(x)$ 为无穷大量?
 p, q 取何值时 $f(x)$ 为无穷小量?

五. 证明题 (每小题 9 分, 共 18 分)

23. 设连续函数 $f(x)$ 的值域为 $(\sqrt{3}, 2)$, 证明至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$, 使 $f(\xi) = \sqrt{3} + \xi$.

24. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < c < d < b$, 证明: 对任意的正数 p 和 q , 至少存在一点 $\xi \in [c, d]$, 使 $p \cdot f(c) + q \cdot f(d) = (p+q)f(\xi)$.

第2章 一元微分学部分知识卷 (正考老南师奎特本课后习题)

一. 单项选择题 (每题4分, 共24分)

1. 设 $f(x)$ 是可导函数, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 ().

A. 2 B. 1 C. -1 D. -2.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 \varphi(x) & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $\varphi(x)$ 是有界函数, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ().

A. 极限不存在 B. 极限存在但不连续 C. 连续但不可导 D. 可导.

3. 曲线 $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x(x^2 - 4)}$ 的渐近线条数为 ().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 设点 $(1, -1)$ 是曲线 $y = ax^3 + bx^2 + x$ 的拐点, 则参数 a, b 的值分别为 ().

A. $a=1, b=-3$ B. $a=1, b=3$ C. $a=-1, b=-3$ D. $a=-1, b=3$.

5. 设 $y = xe^x$, 则在区间 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 内 ().

A. 函数单调递增且其图形是凹的

B. 函数单调递增且其图形是凸的

C. 函数单调递减且其图形是凹的

D. 函数单调递减且其图形是凸的

6. 下列函数在所给区间满足罗尔定理条件的是 ().

A. $f(x) = x^2, x \in [0, 3]$

B. $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in [-1, 1]$

C. $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$

D. $f(x) = x\sqrt{3-x}, x \in [0, 3]$.

二. 填空题 (每题4分, 共24分)

7. 设 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-100)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+100)}$, 则 $f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 所确定, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $f(x) = \ln(1+x)$, 则 $f^{(7)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极小值为_____.

12. 函数 $f(x) = x \ln x$ 在 $[1, 2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的 $\xi =$ _____.

三. 计算题 (每小题8分, 共64分)

13. 设 $y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} + 1}$, 求 y', dy .

14. 设 $y = x(\sin x)^{\cos x}$, 求 y' .

15. 设 $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

16. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a^2) & x > 1 \\ \sin b(x-1) & x \leq 1 \end{cases}$, 试确定常数 a, b 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

17. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 所确定, 求 $y''(0)$.

18. 求函数 $y = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值.

19. 求由方程 $x^2 y^2 + y = 1$ ($y > 0$) 所确定 $y = y(x)$ 的极值.

20. 设函数 $y = \frac{\ln x}{x}$

(1) 求函数的单调区间和极值; (2) 求函数图像上的凹凹区间与拐点;

(3) 求函数图像上的渐近线.

四. 综合题 (每小题10分, 共20分)

21. 已知函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $x=0$ 处有极大值2, 且 $(-1, 4)$ 是其图像上的拐点, 求 a, b, c, d 的值.

22. 在坐标平面上过点 $P(1, 4)$ 引一条直线, 使它夹在两坐标轴上的正截距之和为最小, 求此直线方程.

五. 证明题 (每小题9分, 共18分)

23. 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x - x > 2 - \cos x$.

24. 设 α 是一个数, 且 $0 < \alpha < 1$, 证明对任意的 $x > 0$, $\frac{1}{\alpha} x^\alpha + (1-\alpha) \leq x$.