

2001--2014 江苏专转本数学真题 (答案)

2001 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1、下列各极限正确的是 ()

A、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ B、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{1}{x}} = e$ C、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ D、 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$

2、不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ ()

A、 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B、 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$ C、 $\arcsin x$ D、 $\arcsin x + c$

3、若 $f(x) = f(-x)$, 且在 $[0, +\infty)$ 内 $f'(x) > 0$ 、 $f''(x) > 0$, 则在 $(-\infty, 0)$ 内必有 ()

A、 $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ B、 $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

C、 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ D、 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

4、 $\int_0^2 |x-1| dx =$ ()

A、0 B、2 C、-1 D、1

5、方程 $x^2 + y^2 = 4x$ 在空间直角坐标系中表示 ()

A、圆柱面 B、点 C、圆 D、旋转抛物面

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6、设 $\begin{cases} x = te^t \\ y = 2t + t^2 \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=0} =$ _____

7、 $y'' - 6y' + 13y = 0$ 的通解为_____

8、交换积分次序 $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy =$ _____

9、函数 $z = x^y$ 的全微分 $dz =$ _____

10、设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\int_{-1}^1 [f(x) + f(-x) + x] x^3 dx =$ _____

三、计算题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

11、已知 $y = \arctan \sqrt{x} + \ln(1 + 2^x) + \cos \frac{\pi}{5}$ ，求 dy 。

12、计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \int_0^x e^{t^2} dt}{x^2 \sin x}$ 。

13、求 $f(x) = \frac{(x-1)\sin x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并说明其类型。

14、已知 $y^2 = x + \frac{\ln y}{x}$ ，求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1, y=1}$ 。

15、计算 $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$.

16、已知 $\int_{-\infty}^0 \frac{k}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}$, 求 k 的值.

17、求 $y' - y \tan x = \sec x$ 满足 $y|_{x=0} = 0$ 的特解

.

18、计算 $\iint_D \sin y^2 dx dy$, D 是 $x=1$ 、 $y=2$ 、 $y=x-1$ 围成的区域.

19、已知 $y=f(x)$ 过坐标原点, 并且在原点处的切线平行于直线 $2x+y-3=0$, 若 $f'(x)=3ax^2+b$, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值, 试确定 a 、 b 的值, 并求出 $y=f(x)$ 的表达式.

20、设 $z = f(x^2, \frac{x}{y})$ ，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

四、综合题（本大题共 4 小题，第 21 小题 10 分，第 22 小题 8 分，第 23、24 小题各 6 分，共 30 分）

21、过 $P(1,0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线，求

- (1) 切线方程；
- (2) 由 $y = \sqrt{x-2}$ ，切线及 x 轴围成的平面图形面积；
- (3) 该平面图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转一周的体积。

22、设 $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ ，其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0) = 0$ 。

- (1) 求 a ，使得 $g(x)$ 在 $x = 0$ 处连续；

(2) 求 $g'(x)$.

23、设 $f(x)$ 在 $[0, c]$ 上具有严格单调递减的导数 $f'(x)$ 且 $f(0) = 0$ ；试证明：

对于满足不等式 $0 < a < b < a+b < c$ 的 a 、 b 有 $f(a) + f(b) > f(a+b)$.

24、一租赁公司有 40 套设备，若定金每月每套 200 元时可全租出，当租金每月每套增加 10 元时，租出设备就会减少一套，对于租出的设备每套每月需花 20 元的维护费。问每月一套的定金多少时公司可获得最大利润？

高等数学

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1、下列极限中，正确的是 ()

A、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x} = e$

B、 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1$

C、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\sec x} = e$

D、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n)^{\frac{1}{n}} = e$

2、已知 $f(x)$ 是可导的函数，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h} =$ ()

A、 $f'(x)$

B、 $f'(0)$

C、 $2f'(0)$

D、 $2f'(x)$

3、设 $f(x)$ 有连续的导函数，且 $a \neq 0, 1$ ，则下列命题正确的是 ()

A、 $\int f'(ax) dx = \frac{1}{a} f(ax) + C$

B、 $\int f'(ax) dx = f(ax) + C$

C、 $\int f'(ax) dx = af(ax)$

D、 $\int f'(ax) dx = f(x) + C$

4、若 $y = \arctan e^x$ ，则 $dy =$ ()

A、 $\frac{1}{1+e^{2x}} dx$

B、 $\frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

C、 $\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$

D、 $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx$

5、在空间坐标系下，下列为平面方程的是 ()

A、 $y^2 = x$

B、 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$

C、 $\frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{7} = \frac{z}{-3}$

D、 $3x+4z=0$

6、微分方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的通解是 ()

A、 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

B、 $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

C、 $y = (c_1 + c_2 x) e^{-x}$

D、 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

7、已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是可导函数，则 $(f(x) - f(-x))'$ 一定是 ()

A、奇函数

B、偶函数

C、非奇非偶函数

D、不能确定奇偶性

8、设 $I = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}} dx$ ，则 I 的范围是 ()

A、 $0 \leq I \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

B、 $I \geq 1$

C、 $I \leq 0$

D、 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq I \leq 1$

9、若广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 收敛, 则 p 应满足 ()

- A、 $0 < p < 1$ B、 $p > 1$ C、 $p < -1$ D、 $p < 0$

10、若 $f(x) = \frac{1 - 2e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^x}$, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()

- A、可去间断点 B、跳跃间断点 C、无穷间断点 D、连续点

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11、设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $e^x - e^y = \sin(xy)$ 确定, 则 $y'|_{x=0} =$ _____

12、函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$ 的单调增加区间为 _____

13、 $\int_{-1}^1 \frac{x \tan^2 x}{1+x^2} dx =$ _____

14、设 $y(x)$ 满足微分方程 $e^x yy' = 1$, 且 $y(0) = 1$, 则 $y =$ _____

15、交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx =$ _____

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

16、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \tan x}{\int_0^x t(t + \sin t) dt}$

17、已知 $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}}$

18、已知 $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

19、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & , \quad x \geq 0 \\ \frac{1}{1+e^x} & , \quad x < 0 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$

20、计算 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$

21、求 $y' - (\cos x)y = e^{\sin x}$ 满足 $y(0) = 1$ 的解.

22、求积分 $\int \frac{x \arcsin x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx$

23、设 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{k}}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$, 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续, 求: (1) k 的值 (2) $f'(x)$

四、综合题 (本大题共 3 小题, 第 24 小题 7 分, 第 25 小题 8 分, 第 26 小题 8 分, 共 23 分)

24、从原点作抛物线 $f(x) = x^2 - 2x + 4$ 的两条切线, 由这两条切线与抛物线所围成的图形记为 S , 求: (1) S 的面积; (2) 图形 S 绕 X 轴旋转一周所得的立体体积.

25、证明: 当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x \leq 1 - \frac{1}{\pi} x^2$ 成立.

26、已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C(x) = 25000 + 200x + \frac{1}{40}x^2$ (元), 产品产量 x 与价格 P

之间的关系为: $P(x) = 440 - \frac{1}{20}x$ (元)

求: (1) 要使平均成本最小, 应生产多少件产品?

(2) 当企业生产多少件产品时, 企业可获最大利润, 并求最大利润.

2003 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1、已知 $f'(x_0) = 2$ ，则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} =$ ()

- A、2 B、4 C、0 D、-2

2、若已知 $F'(x) = f(x)$ ，且 $f(x)$ 连续，则下列表达式正确的是 ()

- A、 $\int F(x)dx = f(x) + c$ B、 $\frac{d}{dx} \int F(x)dx = f(x) + c$
C、 $\int f(x)dx = F(x) + c$ D、 $\frac{d}{dx} \int F(x)dx = f(x)$

3、下列极限中，正确的是 ()

- A、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} = 2$ B、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 1$ C、 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \infty$ D、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

4、已知 $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ ，则下列正确的是 ()

- A、 $dy = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} dx$ B、 $y' = \sqrt{1 + x^2} dx$
C、 $dy = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ D、 $y' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$

5、在空间直角坐标系下，与平面 $x + y + z = 1$ 垂直的直线方程为 ()

- A、 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ B、 $\frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z}{-3}$

C、 $2x + 2y + 2z = 5$ D、 $x - 1 = y - 2 = z - 3$

6、下列说法正确的是 ()

A、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛

B、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$ 收敛

C、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 绝对收敛

D、级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!$ 收敛

7、微分方程 $y'' + y = 0$ 满足 $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$ 的解是

A、 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

B、 $y = \sin x$

C、 $y = \cos x$

D、 $y = c \cos x$

8、若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & x > 0 \\ \frac{x}{2} & x = 0 \\ \frac{1}{bx} \ln(1-3x) & x < 0 \end{cases}$ 为连续函数, 则 a 、 b 满足

A、 $a = 2$ 、 b 为任何实数

B、 $a + b = \frac{1}{2}$

C、 $a = 2$ 、 $b = -\frac{3}{2}$

D、 $a = b = 1$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

9、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x+y) = e^{xy}$ 所确定, 则 $y'|_{x=0} =$ _____

10、曲线 $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 9$ 的凹区间为 _____

11、 $\int_{-1}^1 x^2 (\sqrt[3]{x} + \sin x) dx =$ _____

12、交换积分次序 $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x, y) dx =$ _____

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

13、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$

14、求函数 $z = \tan\left(\frac{x}{y}\right)$ 的全微分

15、求不定积分 $\int x \ln x dx$

16、计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin \theta|}{1 + \cos^2 \theta} d\theta$

17、求微分方程 $xy' - y = x^2 e^x$ 的通解.

18、已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

19、求函数 $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{|x-1|}$ 的间断点并判断其类型.

20、计算二重积分 $\iint_D (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, 其中 D 是第一象限内由圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 及直线 $y = 0$ 所围成的区域.

四、综合题 (本大题共 3 小题, 第 21 小题 9 分, 第 22 小题 7 分, 第 23 小题 8 分, 共 24 分)

21、设有抛物线 $y = 4x - x^2$, 求:

- (i)、抛物线上哪一点处的切线平行于 X 轴? 写出该切线方程;
- (ii)、求由抛物线与其水平切线及 Y 轴所围平面图形的面积;
- (iii)、求该平面图形绕 X 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

22、证明方程 $xe^x = 2$ 在区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

23、要设计一个容积为 V 立方米的有盖圆形油桶, 已知单位面积造价: 侧面是底面的一半, 而盖又是侧面的一半, 问油桶的尺寸如何设计, 可以使造价最低?

五、附加题（2000 级考生必做，2001 级考生不做）

24、将函数 $f(x) = \frac{1}{4+x}$ 展开为 x 的幂级数，并指出收敛区间。（不考虑区间端点）（本小题 4 分）

25、求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的通解。（本小题 6 分）

2004 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分。）

1、 $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in [-3, 0] \\ -x^3 & x \in (0, 2] \end{cases}$ ，是：（ ）

A、有界函数 B、奇函数 C、偶函数 D、周期函数

2、当 $x \rightarrow 0$ 时， $x^2 - \sin x$ 是关于 x 的（ ）

A、高阶无穷小 B、同阶但不是等价无穷小 C、低阶无穷小 D、等价无穷小

3、直线 L 与 x 轴平行且与曲线 $y = x - e^x$ 相切，则切点的坐标是（ ）

A、(1,1) B、(-1,1) C、(0,-1) D、(0,1)

4、 $x^2 + y^2 = 8R^2$ 设所围的面积为 S ，则 $\int_0^{2\sqrt{2}R} \sqrt{8R^2 - x^2} dx$ 的值为（ ）

A、 S B、 $\frac{S}{4}$ C、 $\frac{S}{2}$ D、 $2S$

5、设 $u(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 、 $v(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ，则下列等式成立的是（ ）

A、 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ B、 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$ C、 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ D、 $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$

6、微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的特解 y^* 的形式应为（ ）

A、 Axe^{2x}

B、 $(Ax+B)e^{2x}$

C、 Ax^2e^{2x}

D、 $x(Ax+B)e^{2x}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）

7、设 $f(x) = \left(\frac{2+x}{3+x}\right)^x$ ，则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$ _____

8、过点 $M(1,0,-2)$ 且垂直于平面 $4x+2y-3z=\sqrt{2}$ 的直线方程为 _____

9、设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ ， $n \in N$ ，则 $f'(0) =$ _____

10、求不定积分 $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ _____

11、交换二次积分的次序 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y) dy =$ _____

12、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$ 的收敛区间为 _____

三、解答题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

13、求函数 $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ 的间断点，并判断其类型.

14、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\tan t - \sin t) dt}{(e^{x^2} - 1) \ln(1 + 3x^2)}$.

15、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^y = 1$ 所确定，求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0}$ 的值.

16、设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{e^x}{x}$ ，计算 $\int x f'(2x) dx$.

17、计算广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$.

18、设 $z = f(x-y, xy)$, 且具有二阶连续的偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

19、计算二重积分 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy$, 其中 D 由曲线 $y=x$ 及 $y^2=x$ 所围成.

20、把函数 $f(x) = \frac{1}{x+2}$ 展开为 $x-2$ 的幂级数, 并写出它的收敛区间.

四、综合题 (本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 满分 24 分)

21、证明: $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$, 并利用此式求 $\int_0^\pi x \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$.

22、设函数 $f(x)$ 可导, 且满足方程 $\int_0^x t f(t) dt = x^2 + 1 + f(x)$, 求 $f(x)$.

23、甲、乙二城位于一直线形河流的同一侧，甲城位于岸边，乙城离河岸 40 公里，乙城在河岸的垂足与甲城相距 50 公里，两城计划在河岸上合建一个污水处理厂，已知从污水处理厂到甲乙二城铺设排污管道的费用分别为每公里 500、700 元。问污水处理厂建在何处，才能使铺设排污管道的费用最省？

2005 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、 $x=0$ 是 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ 的 ()

A、可去间断点 B、跳跃间断点 C、第二类间断点 D、连续点

2、若 $x=2$ 是函数 $y = x - \ln(\frac{1}{2} + ax)$ 的可导极值点，则常数 $a =$ ()

A、 -1 B、 $\frac{1}{2}$ C、 $-\frac{1}{2}$ D、 1

3、若 $\int f(x)dx = F(x) + C$ ，则 $\int \sin x f(\cos x)dx =$ ()

A、 $F(\sin x) + C$ B、 $-F(\sin x) + C$ C、 $F(\cos x) + C$ D、 $-F(\cos x) + C$

4、设区域 D 是 xoy 平面上以点 $A(1,1)$ 、 $B(-1,1)$ 、 $C(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，区域 D_1 是 D 在第一象限的部分，则： $\iint_D (xy + \cos x \sin y) dx dy =$ ()

A、 $2 \iint_{D_1} (\cos x \sin y) dx dy$ B、 $2 \iint_{D_1} xy dx dy$

C、 $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$

D、0

5、设 $u(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$, $v(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 则下列等式成立的是 ()

A、 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$

B、 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$

C、 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

D、 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}$

6、正项级数(1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 、(2) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^3$, 则下列说法正确的是 ()

A、若(1)发散、则(2)必发散

B、若(2)收敛、则(1)必收敛

C、若(1)发散、则(2)可能发散也可能收敛 D、(1)、(2)敛散性相同

二、填空题(本大题共6小题, 每小题4分, 满分24分)

7、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$ _____;

8、函数 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[1,e]$ 上满足拉格郎日中值定理的 $\xi =$ _____;

9、 $\int_{-1}^1 \frac{\pi x + 1}{1 + x^2} dx =$ _____;

10、设向量 $\alpha = \{3, 4, -2\}$ 、 $\beta = \{2, 1, k\}$; α 、 β 互相垂直, 则 $k =$ _____;

11、交换二次积分的次序 $\int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy =$ _____;

12、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)x^n$ 的收敛区间为_____;

三、解答题(本大题共8小题, 每小题8分, 满分64分)

13、设函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)+2\sin x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 R 内连续, 并满足: $f(0)=0$ 、 $f'(0)=6$, 求 a .

14、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

15、计算 $\int \tan^3 x \sec x dx$.

16、计算 $\int_0^1 \arctan x dx$

17、已知函数 $z = f(\sin x, y^2)$ ，其中 $f(u, v)$ 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

18、求过点 $A(3, 1, -2)$ 且通过直线 $L: \frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程.

19、把函数 $f(x) = \frac{x^2}{2-x-x^2}$ 展开为 x 的幂级数，并写出它的收敛区间.

20、求微分方程 $xy' + y - e^x = 0$ 满足 $y_{x=1} = e$ 的特解.

四、证明题（本题 8 分）

21、证明方程： $x^3 - 3x + 1 = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有且仅有一根.

五、综合题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，满分 30 分）

22、设函数 $y = f(x)$ 的图形上有一拐点 $P(2,4)$ ，在拐点处的切线斜率为 -3 ，又知该函数的二阶导数 $y'' = 6x + a$ ，求 $f(x)$ 。

23、已知曲边三角形由 $y^2 = 2x$ 、 $x = 0$ 、 $y = 1$ 所围成，求：

- (1)、曲边三角形的面积；
- (2)、曲边三角形绕 X 轴旋转一周的旋转体体积。

24、设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(2) = 1$ ， $F(u) = \int_1^u dy \int_y^u f(x) dx$ ， $(u > 1)$

- (1)、交换 $F(u)$ 的积分次序；
- (2)、求 $F'(2)$ 。

2006 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\frac{x}{2})}{x} = \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(\frac{x}{3})} =$ ()

A、 $\frac{1}{2}$ B、2 C、3 D、 $\frac{1}{3}$

2、函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处 ()

A、连续但不可导 B、连续且可导 C、不连续也不可导 D、可导但不连续

3、下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是 ()

A、 $y = e^x$ B、 $y = 1 + |x|$ C、 $y = 1 - x^2$ D、 $y = 1 - \frac{1}{x}$

4、已知 $\int f(x)dx = e^{2x} + C$, 则 $\int f'(-x)dx =$ ()

A、 $2e^{-2x} + C$ B、 $\frac{1}{2}e^{-2x} + C$ C、 $-2e^{-2x} + C$ D、 $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

5、设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 如下说法正确的是 ()

A、如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛 B、如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ ($0 \leq l < \infty$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛

C、如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 必定收敛 D、如果 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛

6、设对一切 x 有 $f(-x, y) = -f(x, y)$, $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$,

$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, 则 $\iint_D f(x, y)dx dy =$ ()

A、0 B、 $\iint_{D_1} f(x, y)dx dy$ C、 $2 \iint_{D_1} f(x, y)dx dy$ D、 $4 \iint_{D_1} f(x, y)dx dy$

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分)

7、已知 $x \rightarrow 0$ 时, $a(1 - \cos x)$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____

8、若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有定义, 则当 $A =$ _____ 时, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

9、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数且 $f(1) = 2$, $\int_0^1 f(x)dx = 3$, 则 $\int_0^1 x f'(x)dx =$ _____

10、设 $|\vec{a}|=1$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$ _____

11、设 $u = e^{xy} \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial x} =$ _____

12、 $\iint_D dx dy =$ _____. 其中 D 为以点 $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(0,2)$ 为顶点的三角形区域.

三、解答题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13、计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

14、若函数 $y = y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

15、计算 $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.

16、计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$.

17、求微分方程 $x^2 y' = xy - y^2$ 的通解.

18、将函数 $f(x) = x \ln(1+x)$ 展开为 x 的幂函数（要求指出收敛区间）.

19、求过点 $M(3,1,-2)$ 且与二平面 $x-y+z-7=0$ 、 $4x-3y+z-6=0$ 都平行的直线方程.

20、设 $z = xf(x^2, xy)$ 其中 $f(u, v)$ 的二阶偏导数存在，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

四、证明题（本题满分 8 分）.

21、证明：当 $|x| \leq 2$ 时， $|3x - x^3| \leq 2$.

五、综合题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，满分 30 分）

22、已知曲线 $y = f(x)$ 过原点且在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + y$ ，求此曲线方程.

23、已知一平面图形由抛物线 $y = x^2$ 、 $y = -x^2 + 8$ 围成.

- (1) 求此平面图形的面积；
- (2) 求此平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

24、设 $g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \iint_{D_t} f(x) dx dy & t \neq 0 \\ a & t = 0 \end{cases}$ ，其中 D_t 是由 $x = t$ 、 $y = t$ 以及坐标轴围成的正方形区域，

函数 $f(x)$ 连续.

- (1) 求 a 的值使得 $g(t)$ 连续；
- (2) 求 $g'(t)$.

2007 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x} = 2$ ，则 $\lim_{x \rightarrow \infty} x f\left(\frac{1}{2x}\right) =$ ()

- A、 $\frac{1}{4}$ B、 $\frac{1}{2}$ C、2 D、4

2、已知当 $x \rightarrow 0$ 时， $x^2 \ln(1+x^2)$ 是 $\sin^n x$ 的高阶无穷小，而 $\sin^n x$ 又是 $1-\cos x$ 的高阶无穷小，则正整数 $n =$ ()

- A、1 B、2 C、3 D、4

3、设函数 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ ，则方程 $f'(x) = 0$ 的实根个数为 ()

- A、1 B、2 C、3 D、4

4、设函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin 2x$ ，则 $\int f'(2x) dx =$ ()

- A、 $\cos 4x + C$ B、 $\frac{1}{2} \cos 4x + C$ C、 $2 \cos 4x + C$ D、 $\sin 4x + C$

5、设 $f(x) = \int_1^{x^2} \sin t^2 dt$ ，则 $f'(x) =$ ()

- A、 $\sin x^4$ B、 $2x \sin x^2$ C、 $2x \cos x^2$ D、 $2x \sin x^4$

6、下列级数收敛的是 ()

- A、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ B、 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ C、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$ D、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7、设函数 $f(x) = \begin{cases} (1+kx)^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ ，在点 $x=0$ 处连续，则常数 $k =$ _____

8、若直线 $y = 5x + m$ 是曲线 $y = x^2 + 3x + 2$ 的一条切线，则常数 $m =$ _____

9、定积分 $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} (1+x \cos^3 x) dx$ 的值为 _____

10、已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 均为单位向量，且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ ，则以向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 _____

11、设 $z = \frac{x}{y}$ ，则全微分 $dz =$ _____

12、设 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ 为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，则该微分方程为 _____

三、解答题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x \tan x}$.

14、设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^x - e^y = xy$ 确定，求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 、 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.

15、求不定积分 $\int x^2 e^{-x} dx$.

16、计算定积分 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$.

17、设 $z = f(2x+3y, xy)$ 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

18、求微分方程 $xy' - y = 2007x^2$ 满足初始条件 $y|_{x=1} = 2008$ 的特解.

19、求过点 $(1, 2, 3)$ 且垂直于直线 $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 的平面方程.

20、计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$.

四、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

21、设平面图形由曲线 $y = 1 - x^2$ ($x \geq 0$) 及两坐标轴围成.

(1) 求该平面图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积;

(2) 求常数 a 的值, 使直线 $y = a$ 将该平面图形分成面积相等的两部分.

22、设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 9$ 具有如下性质:

(1) 在点 $x = -1$ 的左侧临近单调减少;

(2) 在点 $x = -1$ 的右侧临近单调增加;

(3) 其图形在点 $(1, 2)$ 的两侧凹凸性发生改变.

试确定 a , b , c 的值.

五、证明题 (本大题共 2 小题, 每小题 9 分, 满分 18 分)

23、设 $b > a > 0$, 证明: $\int_a^b dy \int_y^b f(x) e^{2x+y} dx = \int_a^b (e^{3x} - e^{2x+a}) f(x) dx$.

24、求证：当 $x > 0$ 时， $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$.

2008 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，下列函数中必为奇函数的是 ()

- A、 $y = -|f(x)|$ B、 $y = x^3 f(x^4)$
C、 $y = -f(-x)$ D、 $y = f(x) + f(-x)$

2、设函数 $f(x)$ 可导，则下列式子中正确的是 ()

- A、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(x)}{x} = -f'(0)$ B、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2x) - f(x)}{x} = f'(x_0)$
C、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$ D、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2f'(x_0)$

3、设函数 $f(x) = \int_{2x}^1 t^2 \sin t \, dt$ ，则 $f'(x)$ 等于 ()

- A、 $4x^2 \sin 2x$ B、 $8x^2 \sin 2x$ C、 $-4x^2 \sin 2x$ D、 $-8x^2 \sin 2x$

4、设向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ， $\vec{b} = (3, 2, 4)$ ，则 $\vec{a} \times \vec{b}$ 等于 ()

- A、 $(2, 5, 4)$ B、 $(2, -5, -4)$ C、 $(2, 5, -4)$ D、 $(-2, -5, 4)$

5、函数 $z = \ln \frac{y}{x}$ 在点 $(2, 2)$ 处的全微分 dz 为 ()

- A、 $-\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy$ B、 $\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy$ C、 $\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$ D、 $-\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}dy$

6、微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 1$ 的通解为 ()

A、 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 1$

B、 $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}$

C、 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + 1$

D、 $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7、设函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x|(x-1)}$ ，则其第一类间断点为_____.

8、设函数 $f(x) = \begin{cases} a + x, & x \geq 0, \\ \frac{\tan 3x}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续，则 $a =$ _____.

9、已知曲线 $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$ ，则其拐点为_____.

10、设函数 $f(x)$ 的导数为 $\cos x$ ，且 $f(0) = \frac{1}{2}$ ，则不定积分 $\int f(x) dx =$ _____.

11、定积分 $\int_{-1}^1 \frac{2 + \sin x}{1 + x^2} dx$ 的值为_____.

12、幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域为_____.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13、求极限： $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{3x}$

14、设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ 所决定，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

15、求不定积分： $\int \frac{x^3}{x+1} dx$.

16、求定积分： $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$.

17、设平面 π 经过点 A (2, 0, 0), B (0, 3, 0), C (0, 0, 5)，求经过点 P (1, 2, 1) 且与平面 π 垂直的直线方程.

18、设函数 $z = f(x + y, \frac{y}{x})$, 其中 $f(x)$ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

19、计算二重积分 $\iint_D x^2 dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \frac{1}{x}$, 直线 $y = x, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域.

20、求微分方程 $xy' = 2y + x^2$ 的通解.

四、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

21、求曲线 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 的切线, 使其在两坐标轴上的截距之和最小, 并求此最小值.

22、设平面图形由曲线 $y = x^2$, $y = 2x^2$ 与直线 $x = 1$ 所围成.

(1) 求该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

(2) 求常数 a , 使直线 $x = a$ 将该平面图形分成面积相等的两部分.

五、证明题 (本大题共 2 小题, 每小题 9 分, 满分 18 分)

23、设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 2a]$ ($a > 0$) 上连续, 且 $f(0) = f(2a) \neq f(a)$, 证明: 在开区间 $(0, a)$ 上至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

24、对任意实数 x ，证明不等式： $(1-x)e^x \leq 1$.

2009 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、已知 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 3$ ，则常数 a, b 的取值分别为 ()

A、 $a = -1, b = -2$ B、 $a = -2, b = 0$ C、 $a = -1, b = 0$ D、 $a = -2, b = -1$

2、已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ ，则 $x = 2$ 为 $f(x)$ 的

A、跳跃间断点 B、可去间断点 C、无穷间断点 D、震荡间断点

3、设函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处可导，则常数 α 的取值范围为 ()

A、 $0 < \alpha < 1$ B、 $0 < \alpha \leq 1$ C、 $\alpha > 1$ D、 $\alpha \geq 1$

4、曲线 $y = \frac{2x+1}{(x-1)^2}$ 的渐近线的条数为 ()

A、1 B、2 C、3 D、4

5、设 $F(x) = \frac{1}{3} \ln(3x+1)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f'(2x+1)dx =$ ()

A、 $\frac{1}{6x+4} + C$ B、 $\frac{3}{6x+4} + C$ C、 $\frac{1}{12x+8} + C$ D、 $\frac{3}{12x+8} + C$

6、设 α 为非零常数，则数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\alpha}{n^2}$ ()

A、条件收敛 B、绝对收敛 C、发散 D、敛散性与 α 有关

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7、已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-C} \right)^x = 2$ ，则常数 $C =$ _____.

8、设函数 $\varphi(x) = \int_0^{2x} te^t dt$ ，则 $\varphi'(x) =$ _____.

9、已知向量 $\vec{a} = (1, 0, -1)$ ， $\vec{b} = (1, -2, 1)$ ，则 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为_____.

10、设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xz^2 + yz = 1$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

11、若幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2} x^n$ ($a > 0$) 的收敛半径为 $\frac{1}{2}$ ，则常数 $a =$ _____.

12、微分方程 $(1+x^2)ydx - (2-y)x dy = 0$ 的通解为_____.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分）

13、求极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$

14、设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(1+t) \\ y = t^2 + 2t - 3 \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

15、求不定积分： $\int \sin \sqrt{2x+1} dx$.

16、求定积分： $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx$.

17、求通过直线 $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 且垂直于平面 $x+y+z+2=0$ 的平面方程.

18、计算二重积分 $\iint_D y d\sigma$ ，其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2, x^2 + y^2 \geq 2\}$.

19、设函数 $z = f(\sin x, xy)$ ，其中 $f(x)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

20、求微分方程 $y'' - y = x$ 的通解.

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，满分 20 分）

21、已知函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ，试求：

- (1) 函数 $f(x)$ 的单调区间与极值；
- (2) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点；
- (3) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-2, 3]$ 上的最大值与最小值.

22、设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, y = 0$ 所围成的平面区域， D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域，其中 $0 < a < 2$. 试求：

- (1) D_1 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积 V_1 ，以及 D_2 绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积 V_2 .
- (2) 求常数 a 的值，使得 D_1 的面积与 D_2 的面积相等.

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，满分 18 分）

23、已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ 1+x, & x \geq 0 \end{cases}$ ，证明函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续但不可导.

24、证明：当 $1 < x < 2$ 时， $4x \ln x > x^2 + 2x - 3$ 。

2010 年江苏省普通高校“专转本”统一考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $f(x) = x - \sin x$ 与 $g(x) = ax^n$ 是等价无穷小，则常数 a, n 的值为 ()

- A. $a = \frac{1}{6}, n = 3$ B. $a = \frac{1}{3}, n = 3$ C. $a = \frac{1}{12}, n = 4$ D. $a = \frac{1}{6}, n = 4$

2. 曲线 $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 5x + 6}$ 的渐近线共有 ()

- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

3. 设函数 $\Phi(x) = \int_x^2 e^t \cos t dt$ ，则函数 $\Phi(x)$ 的导数 $\Phi'(x)$ 等于 ()

- A. $2xe^{x^2} \cos x^2$ B. $-2xe^{x^2} \cos x^2$ C. $-2xe^x \cos x$ D. $-e^{x^2} \cos x^2$

4. 下列级数收敛的是 ()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+n}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

5. 二次积分 $\int_0^1 dy \int_1^{y+1} f(x, y) dx$ 交换积分次序后得 ()

- A. $\int_0^1 dx \int_1^{x+1} f(x, y) dy$ B. $\int_1^2 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy$
C. $\int_1^2 dx \int_1^{x-1} f(x, y) dy$ D. $\int_1^2 dx \int_{x-1}^1 f(x, y) dy$

6. 设 $f(x) = x^3 - 3x$ ，则在区间 $(0, 1)$ 内 ()

- A. 函数 $f(x)$ 单调增加且其图形是凹的 B. 函数 $f(x)$ 单调增加且其图形是凸的
C. 函数 $f(x)$ 单调减少且其图形是凹的 D. 函数 $f(x)$ 单调减少且其图形是凸的

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x =$ _____

8. 若 $f'(0)=1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x} =$ _____

9. 定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x^3+1}{x^2+1} dx$ 的值为 _____

10. 设 $\vec{a}=(1,2,3), \vec{b}=(2,5,k)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, 则常数 $k =$ _____

11. 设函数 $z = \ln \sqrt{x^2+4y}$, 则 $\left. \frac{dz}{dy} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} =$ _____

12. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 的收敛域为 _____

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分)

13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right)$

14. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y + e^{x+y} = 2x$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

15. 求不定积分 $\int x \arctan x dx$

16. 计算定积分 $\int_0^4 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}} dx$

17. 求通过点 $(1,1,1)$, 且与直线 $\begin{cases} x=2+t \\ y=3+2t \\ z=5+3t \end{cases}$ 垂直, 又与平面 $2x-z-5=0$ 平行的直线的方程。

18. 设 $z = y^2 f(xy, e^x)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

19. 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$, 其中 D 是由曲线 $x = \sqrt{1-y^2}$, 直线 $y=x$ 及 x 轴所围成的闭区域。

20、已知函数 $y=e^x$ 和 $y=e^{-2x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个解，试确定常数 p, q 的值，并求微分方程 $y''+py'+qy=e^x$ 的通解。

四、证明题（每小题 9 分，共 18 分）

21、证明：当 $x>1$ 时， $e^{x-1} > \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

22、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶连续导数，且

$\varphi(0)=0, \varphi'(0)=1$ ，证明：函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导。

五、综合题（每小题 10 分，共 20 分）

23、设由抛物线 $y=x^2(x \geq 0)$ ，直线 $y=a^2(0 < a < 1)$ 与 y 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积记为 $V_1(a)$ ，由抛物线 $y=x^2(x \geq 0)$ ，直线 $y=a^2(0 < a < 1)$ 与直线 $x=1$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积记为 $V_2(a)$ ，另 $V(a)=V_1(a)+V_2(a)$ ，试求常数 a 的值，使 $V(a)$ 取得最小值。

24、设函数 $f(x)$ 满足方程 $f'(x)+f(x)=2e^x$ ，且 $f(0)=2$ ，记由曲线 $y=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 与直线 $y=1, x=t(t>0)$ 及 y 轴所围平面图形的面积为 $A(t)$ ，试求 $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$

2001 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、C 2、D 3、B 4、D 5、A 6、2

7、 $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ，其中 C_1 、 C_2 为任意实数

$$8、\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx \quad 9、yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy \quad 10、\frac{64}{5}$$

$$11、dy = \left(\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2^x \ln x}{1+2^x} \right) dx \quad 12、-\frac{1}{3}$$

13、 $x = -1$ 是第二类无穷间断点； $x = 0$ 是第一类跳跃间断点； $x = 1$ 是第一类可去间断点。

$$14、1 \quad 15、\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{e^{2x} + e^x - e^x}{1+e^x} dx = e^x - \ln(1+e^x) + C \quad 16、\frac{1}{\pi}$$

$$17、y = e^{-\int \tan x dx} \left[\int \sec x \cdot e^{\int \tan x dx} dx + C \right] = e^{-\ln \cos x} \left[\int \sec x \cdot e^{\ln \cos x} dx + C \right] = \frac{x+C}{\cos x},$$

$$y|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{0+C}{\cos 0} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{\cos x}.$$

$$18、解：原式 = \int_0^2 \sin y^2 dy \int_1^{1+y} dx = \frac{1-\cos 4}{2}$$

19、解：“在原点的切线平行于直线 $2x + y - 3 = 0$ ” $\Rightarrow f'(x)|_{x=0} = -2$ 即 $b = -2$

又由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值，得 $f'(1) = 0$ ，即 $3a + b = 0$ ，得 $a = -\frac{b}{3} = \frac{2}{3}$

故 $f'(x) = 2x^2 - 2$ ，两边积分得 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + c$ ，又因曲线 $y = f(x)$ 过原点，

所以 $c = 0$ ，所以 $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x$

$$20、\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \cdot 2x + f'_2 \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x^2}{y^2} f''_{12} - \frac{x}{y^3} f''_{22} - \frac{1}{y^2} f'_{22}$$

$$21、(1) 2y - x + 1 = 0; (2) \frac{1}{3}; (3) V_x = \frac{\pi}{6}, V_y = \frac{6}{5}\pi$$

$$\begin{aligned}
 22、 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(\Delta x) \cdot \Delta x - f(\Delta x)}{1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(\Delta x) \cdot \Delta x - f(\Delta x)}{(\Delta x)^2} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f''(\Delta x) \cdot \Delta x + f'(\Delta x) - f'(\Delta x)}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f''(\Delta x) \cdot \Delta x}{2\Delta x} = \frac{1}{2} f''(0).
 \end{aligned}$$

23、由拉格朗日定理知：

$$\begin{aligned}
 \frac{f(a+b) - f(b)}{a} &= f'(\xi_1) \quad (b < \xi_1 < a+b), \\
 \frac{f(a) - f(0)}{a} &= f'(\xi_2) \quad (b < \xi_2 < a)
 \end{aligned}$$

由于 $f'(x)$ 在 $(0, c)$ 上严格单调递减，知 $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ ，因 $f(0) = 0$ ，故

$$f(a) + f(b) > f(a+b).$$

24、解：设每月每套租金为 $200+10x$ ，则租出设备的总数为 $40-x$ ，每月的毛收入为：

$(200+10x)(40-x)$ ，维护成本为： $20(40-x)$ 。于是利润为：

$$L(x) = (180+10x)(40-x) = 7200 + 220x - 10x^2 \quad (0 \leq x \leq 40)$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow x = 11$$

比较 $x=0$ 、 $x=11$ 、 $x=40$ 处的利润值，可得 $L(11) > L(0) > L(40)$ ，

故租金为 $(200+10 \times 11) = 310$ 元时利润最大。

2002 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

01—05、ACABD 06—10、CBABB 11、1 12、 $(-\infty, 1]$ 13、0

$$14、\sqrt{-2e^{-x}+3} \quad 15、\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy \quad 16、\frac{3}{2} \quad 17、1$$

$$18、\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

19、解：令 $t = x-1$ ，则 $x=2$ 时 $t=1$ ， $x=0$ 时， $t=-1$ ，

$$\text{所以 } \int_0^2 f(x-1)dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 1 + \ln(1+e^{-1}) = \ln(e+1)$$

$$20、\text{原式} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r \cdot r dr = \frac{\pi}{12}$$

$$21、y = e^{\cos x}(x+1) \quad 22、\frac{1}{4}\arcsin^2 x^2 + C$$

$$23、(1) k = e$$

$$(2) f'(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) & x \neq 0 \\ -\frac{e}{2} & x = 0 \end{cases}$$

$$24、(1) S = \int_{-2}^0 dx \int_{-6x}^{x^2-2x+4} dy + \int_0^2 dx \int_{2x}^{x^2-2x+4} dy = \frac{16}{3}$$

$$(2) V = \pi \int_{-2}^2 (x^2 - 2x + 4)^2 dx - \pi \int_{-2}^0 (-6x)^2 dx - \pi \int_0^2 (2x)^2 dx = \frac{512}{15} \pi$$

$$25、证明：F(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi} - \cos x, \text{ 因为 } F(-x) = F(x), \text{ 所以 } F(x) \text{ 是偶函数, 我们只需要考虑}$$

$$\text{区间} \left[0, \frac{\pi}{2} \right), \text{ 则 } F'(x) = -\frac{2x}{\pi} + \sin x, \quad F''(x) = -\frac{2}{\pi} + \cos x.$$

$$\text{在 } x \in \left[0, \arccos \frac{2}{\pi} \right] \text{ 时, } F''(x) > 0, \text{ 即表明 } F'(x) \text{ 在 } \left[0, \arccos \frac{2}{\pi} \right] \text{ 内单调递增, 所以函数}$$

$$F(x) \text{ 在 } \left[0, \arccos \frac{2}{\pi} \right) \text{ 内严格单调递增;}$$

$$\text{在 } x \in \left(\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 时, } F''(x) < 0, \text{ 即表明 } F'(x) \text{ 在 } \left(\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 内单调递减, 又因为}$$

$$F'(\frac{\pi}{2}) = 0, \text{ 说明 } F(x) \text{ 在 } \left(\arccos \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 内单调递增.}$$

$$\text{综上所述, } F(x) \text{ 的最小值是当 } x=0 \text{ 时, 因为 } F(0)=0, \text{ 所以 } F(x) \text{ 在 } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 内满足}$$

$$F(x) \geq 0.$$

$$26、(1) \text{ 设生产 } x \text{ 件产品时, 平均成本最小, 则平均成本}$$

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{25000}{x} + 200 + \frac{1}{40}x, \quad \bar{C}'(x) = 0 \Rightarrow x = 100 \text{ (件)}$$

$$(2) \text{ 设生产 } x \text{ 件产品时, 企业可获最大利润, 则最大利润}$$

$$xP(x) - C(x) = x \left(440 - \frac{1}{20}x \right) - \left(25000 + 200x + \frac{1}{40}x^2 \right),$$

$(xP(x) - C(x))' = 0 \Rightarrow x = 1600$. 此时利润 $xP(x) - C(x) = 167000$ (元).

2003 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、B 2、C 3、D 4、C 5、D 6、B 7、B 8、C 9、 $e^2 - 1$ 10、 $(1, +\infty)$ 11、0

$$12、\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy \quad 13、\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}]^{x^2 \cdot \frac{1}{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\cos x}} = e^2$$

$$14、dz = \frac{1}{y} \sec^2 \frac{x}{y} dx - \frac{x}{y^2} \sec^2 \frac{x}{y} dy \quad 15、\frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$$

$$16、\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{-\sin \theta}{1+\cos^2 \theta} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{1+\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$17、y = x(e^x + c) \quad 18、\frac{dy}{dx} = \frac{t}{2}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1+t^2}{4t}$$

$$19、x=1 \text{ 是 } f(x) = \frac{\sin(x-1)}{|x-1|} \text{ 的间断点, } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin(x-1)}{|x-1|} = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1)}{|x-1|} = 1$$

$$x=1 \text{ 是 } f(x) = \frac{\sin(x-1)}{|x-1|} \text{ 的第一类跳跃间断点.}$$

$$20、\iint_D (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (1-r) dr = \frac{\pi}{2} - \frac{16}{9}$$

$$21、(i) \text{ 切线方程: } y = 4; \quad (ii) S = \int_0^2 [4 - (4x - x^2)] dx = \frac{8}{3}$$

$$(iii) V_x = V_1 - V_2 = \pi \times 4^2 \times 2 - \pi \int_0^2 (4x - x^2) dx = \frac{224}{15} \pi$$

22、证明：令 $f(x) = xe^x - 2$, $f(0) = -2 < 0$, $f(1) = e - 2 > 0$, 因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个实数 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$; 又因为 $f'(x) = e^x(1+x)$ 在 $(0,1)$ 内大于零, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递增, 所以在 $(0,1)$ 内犹且仅有一个实根.

23、解：设圆柱形底面半径为 r , 高位 h , 侧面单位面积造价为 l , 则有

$$\begin{cases} V = \pi r^2 h & (1) \\ y = \pi r^2 \cdot 2l + \pi r^2 \cdot \frac{l}{2} + 2\pi rhl & (2) \end{cases}$$

由 (1) 得 $h = \frac{V}{\pi r^2}$ 代入 (2) 得: $y = \pi l \left(2r^2 + \frac{1}{2}r^2 + \frac{2V}{\pi r} \right)$

令 $y' = \pi l \left(5r - \frac{2V}{r^2\pi} \right) = 0$, 得: $r = \sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$; 此时圆柱高 $h = \frac{V}{\pi} \left(\frac{2V}{5\pi} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{25V}{4\pi}}$.

所以当圆柱底面半径 $r = \sqrt[3]{\frac{2V}{5\pi}}$, 高为 $h = \sqrt[3]{\frac{25V}{4\pi}}$ 时造价最低.

24、解: $f'(x) = -\frac{1}{(4+x)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(4+x)^3}$, $f'''(x) = -\frac{2 \times 3}{(4+x)^4}$, ...

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(4+x)^{n+1}},$$

$$f(0) = \frac{1}{4}, \quad f'(0) = -\frac{1}{4^2}, \quad f''(0) = \frac{2}{4^3}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{n!}{4^{n+1}}$$

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}x + \frac{1}{4^3}x^2 + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{4^{n+1}} + \dots,$$

收敛区间 $(-4, 4)$

25、解: 对应特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, 所以 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$, 因为 $\lambda = 0$

不是特征方程的根, 设特解方程为 $y^* = b_0 x + b_1$, 代入原方程, 解得: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - x + \frac{1}{3}$.

2004 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、A 2、B 3、C 4、B 5、A 6、D 7、 e^{-1}

$$8、\frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-3} \quad 9、n! \quad 10、\frac{1}{4} \arcsin^4 x + C$$

$$11、\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx \quad 12、(-1, 3)$$

13、间断点为 $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, 为可去间断点; 当 $x = k\pi$,

$k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \infty$, 为第二类间断点.

$$14、\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\tan t - \sin t) dt}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{12x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \sin x)}{12x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{12x^3} = \frac{1}{24}.$$

15、 $x = 0$ 代入原方程得 $y(0) = 1$, 对原方程求导得 $y' - e^y - x e^y y' = 0$, 对上式求导并将 $x = 0$,

$y=1$ 代入, 解得: $y''=2e^2$.

16、因为 $f(x)$ 的一个原函数为 $\frac{e^x}{x}$, 所以 $f(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$,

$$\begin{aligned}\int x f'(2x) dx &= \frac{1}{2} \int x f'(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int x df(2x) = \frac{1}{2} x f(2x) - \frac{1}{2} \int f(2x) dx \\ &= \frac{1}{2} x f(2x) - \frac{1}{4} \int f(2x) d(2x) = \frac{x(2x-1)e^{2x}}{8x^2} - \frac{e^{2x}}{8x} + C = \frac{x-1}{4x} e^{2x} + C\end{aligned}$$

$$17、\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{2t}{t(t^2+1)} dt = 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = 2 \arctan t \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$18、\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' + f_2' \cdot y;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_{11}'' \cdot (-1) + f_{12}'' \cdot x + f_2' + y[f_{21}'' \cdot (-1) + f_{22}'' \cdot x] \\ &= -f_{11}'' + (x-y)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}19、\text{原式} &= \iint_D \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (1-y) \sin y dy \\ &= (y-1) \cos y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy = 1 - \sin 1\end{aligned}$$

$$20、f(x) = \frac{1}{4+x-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-2}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{4^n}, \quad (-2 < x < 6)$$

$$\begin{aligned}21、\text{证明: 令 } t = \pi - x, \quad \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= -\int_{\pi}^0 (\pi-t) f(\sin(\pi-t)) dt = \int_0^{\pi} (\pi-t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx\end{aligned}$$

$$\text{故 } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx, \quad \text{证毕.}$$

$$\int_0^{\pi} x \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \arctan(\cos x) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

22、等式两边求导的 $xf(x) = 2x + f'(x)$ 即 $f'(x) - xf(x) = -2x$ 且 $f(0) = -1$, $p = -x$,

$$q = -2x, \quad \int p dx = -\frac{x^2}{2}, \quad e^{\int p dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad e^{-\int p dx} = e^{\frac{x^2}{2}},$$

$$\int q e^{\int p dx} dx = \int -2xq \frac{x^2}{2} dx = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{所以 } f(x) = (2e^{-\frac{x^2}{2}} + C)e^{-\frac{x^2}{2}} = 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ 由 } f(0) = -1,$$

$$\text{解得 } C = -3, \quad f(x) = 2 - 3e^{-\frac{x^2}{2}}$$

23、设污水厂建在河岸离甲城 x 公里处，则

$$M(x) = 500x + 700\sqrt{40^2 + (50-x)^2}, \quad 0 \leq x \leq 50,$$

$$M' = 500 + 700 \times \frac{1}{2} \times \frac{2(x-50)}{\sqrt{40^2 + (50-x)^2}} = 0$$

$$\text{解得 } x = 50 - \frac{500}{\sqrt{6}} \text{ (公里)}, \text{ 唯一驻点, 即为所求.}$$

2005 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、A 2、C 3、D 4、A 5、A 6、C 7、2 8、 $e-1$ 9、 $\frac{\pi}{2}$ 10、5

$$11、\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x,y) dx \quad 12、(-1,1)$$

13、因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2 \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} + 2 = f'(0) + 2 = 6 + 2 = 8,$$

$$F(0) = a, \text{ 故 } a = 8.$$

$$14、\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - \cos t + t \sin t}{-\sin t} = -t, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(y')'_t}{x'_t} = \frac{-1}{-\sin t} = \csc t.$$

15、原式

$$= \int \tan^2 x \tan x \sec x dx = \int (\sec^2 x - 1) d \sec x = \int \sec^2 x d \sec x - \sec x = \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C.$$

$$16、\text{原式} = x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$17、\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cdot f'_1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x (f''_{12} \cdot 2y) = 2y \cos x f''_{12}$$

$$18、l = \{5, 2, 1\}, B = \{4, -3, 0\}, \overrightarrow{AB} = \{1, -4, 2\}$$

$$\pi = l \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \{8, -9, -22\}$$

平面点法式方程为:

$$8(x-3) - 9(y-1) - 22(z+2) = 0, \text{ 即 } 8x - 9y - 22z = 59.$$

$$19、f(x) = \frac{x^2}{3} \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{x^2}{6} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{x^2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + 1 \right] x^n, \text{ 收敛域为 } -1 < x < 1.$$

$$20、y' + \frac{1}{x} \cdot y = \frac{e^x}{x}, \text{ 通解为}$$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{e^x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = \frac{C}{x} + \frac{e^x}{x}$$

$$\text{因为 } y(1) = e, e = e + C, \text{ 所以 } C = 0, \text{ 故特解为 } y = \frac{e^x}{x}.$$

$$21、\text{证明: 令 } f(x) = x^3 - 3x + 1, x \in [-1, 1], \text{ 且 } f(-1) = 3 > 0, f(1) = -1 < 0, f(-1) \cdot f(1) < 0,$$

由连续函数零点定理知, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上至少有一实根.

$$22、\text{设所求函数为 } y = f(x), \text{ 则有 } f(2) = 4, f'(2) = -3, f''(2) = 0.$$

$$\text{由 } y'' = 6x + a, y''(2) = 0 \text{ 得 } a = -12, \text{ 即 } y'' = 6x - 12.$$

$$\text{因为 } y'' = 6x - 12, \text{ 故 } y' = 3x^2 - 12x + C_1, \text{ 由 } y'(2) = -3, \text{ 解得 } C_1 = 9.$$

$$\text{故 } y = x^3 - 6x^2 + 9x + C_2, \text{ 由 } y(2) = 4, \text{ 解得 } C_2 = 2.$$

$$\text{所求函数为: } y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2.$$

$$23、(1) S = \int_0^1 \frac{1}{2} y^2 dy = \frac{1}{6} y^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$(2) V_x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (1^2 - 2x) dx = \pi (x - x^2) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

24、解：积分区域 D 为： $1 \leq y \leq u, y \leq x \leq u$

$$(1) F(u) = \iint_D f(x) d\sigma = \int_1^u dx \int_1^x f(x) dy = \int_1^u (x-1) f(x) dx;$$

$$(2) F'(u) = (u-1)f(u), F'(2) = (2-1)f(2) = f(2) = 1.$$

2006 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、C 2、B 3、C 4、C 5、C 6、A 7、2 8、 $f(x_0)$ 9、-1 10、1

11、 $e^{xy}(y \sin x + \cos x)$ 12、1

$$13、原式 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3}$$

$$14、\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}$$

$$15、原式 = \int \sqrt{1+\ln x} d(1+\ln x) = \frac{2}{3} (1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$16、原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d \sin x = x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d \cos x$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 2x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

17、方程变形为 $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$, 令 $p = \frac{y}{x}$ 则 $y' = p + xp'$, 代入得: $xp' = -p^2$, 分离变量得:

$$-\int \frac{1}{p^2} dp = \int \frac{1}{x} dx, \text{ 故 } \frac{1}{p} = \ln|x| + C, y = \frac{x}{\ln|x| + C}.$$

$$18、令 g(x) = \ln(1+x), g(0) = 0, g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+2},$$

$$\text{故 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+2}, -1 < x < 1.$$

$$19、\vec{n}_1\{1,-1,1\}, \vec{n}_2\{4,-3,1\}, \vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}=2i+3j+k$$

$$\text{直线方程为 } \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}.$$

$$20、\frac{\partial z}{\partial y}=x^2 f_2', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=2x f_2'+x^2(f_{21}'' \cdot 2x+f_{22}'' \cdot y)=2x f_2'+2x^3 f_{21}''+x^2 y f_{22}''.$$

$$21、\text{令 } f(x)=3x-x^3, \quad x \in [-2,2], \quad f'(x)=3-3x^2=0, \quad x=\pm 1, \quad f(-1)=-2, \quad f(1)=2, \\ f(2)=-2, \quad f(-2)=2; \text{ 所以 } f_{\min}=-2, \quad f_{\max}=2, \text{ 故 } -2 \leq f(x) \leq 2, \text{ 即 } |3x-x^3| \leq 2.$$

$$22、y'=2x+y, \quad y(0)=0$$

$$\text{通解为 } y=(-2x-2)+Ce^x, \text{ 由 } y(0)=0 \text{ 得 } C=2, \text{ 故 } y=-2x-2+2e^x.$$

$$23、(1) S=\int_{-2}^2 (8-x^2-x^2)dx=\frac{64}{3}$$

$$(2) V=\pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy + \pi \int_4^8 (\sqrt{8-y})^2 dy = 16\pi$$

$$24、\iint_{D_t} f(x)dx dy = \int_0^t dx \int_0^t f(x)dy = t \int_0^t f(x)dx$$

$$g(t)=\begin{cases} \int_0^t f(x) & t \neq 0 \\ a & t = 0 \end{cases}$$

$$(1) \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t f(x)dx = 0, \text{ 由 } g(t) \text{ 的连续性可知 } a = g(0) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$$

$$(2) \text{ 当 } t \neq 0 \text{ 时, } g'(t) = f(t),$$

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h f(x)dx}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0)$$

$$\text{综上, } g'(t) = f(t).$$

2007 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

$$1、B \quad 2、C \quad 3、C \quad 4、A \quad 5、D \quad 6、D \quad 7、\ln 2 \quad 8、1 \quad 9、2\pi \quad 10、\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$11、\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy \quad 12、y''-5y'+6y=0$$

13、解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$

14、解: 方程 $e^x - e^y = xy$, 两边对 x 求导数得 $e^x - e^y \cdot y' = y + xy'$, 故 $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$

又当 $x=0$ 时, $y=0$, 故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 1, \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = -2.$

15、解: $\int x^2 e^{-x} dx = -\int x^2 d(e^{-x}) = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2 \int x d(e^{-x})$
 $= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C.$

16、解: 令 $x = \sin t$, 则 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = 1 - \frac{\pi}{4}.$

17、解: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2f_1' + yf_2', \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2(f_{11}'' \cdot 3 + f_{12}'' \cdot x) + f_2' + y(f_{21}'' \cdot 3 + f_{22}'' \cdot x)$

$= 6f_{11}'' + (2x + 3y)f_{12}'' + xyf_{22}'' + f_2'$

18、解: 原方程可化为 $y' - \frac{1}{x} \cdot y = 2007x$, 相应的齐次方程 $y' - \frac{1}{x} \cdot y = 0$ 的通解为 $y = Cx$. 可

设原方程的通解为 $y = C(x)x$. 将其代入方程得 $C'(x)x + C(x) - C(x) = 2007x$, 所以

$C'(x) = 2007$, 从而

$C(x) = 2007x + C$, 故原方程的通解为 $y = (2007x + C)x$. 又 $y(1) = 2008$, 所以 $C = 1$, 于是

所求特解为 $y = (2007x + 1)x$. (本题有多种解法, 大家不妨尝试一下)

19、解: 由题意, 所求平面的法向量可取为

$$\vec{n} = (1, 1, 1) \times (2, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 1, -3).$$

故所求平面方程为 $2(x-1) + (y-2) - 3(z-3) = 0$, 即 $2x + y - 3z + 5 = 0$.

20、解: $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_D \rho^2 d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{16}{9}.$

21、解: (1) $V = \int_0^1 \pi(1-x^2)^2 dx = \frac{8\pi}{15};$

(2) 由题意得 $\int_0^a (1-y)^{\frac{1}{2}} dy = \int_a^1 (1-y)^{\frac{1}{2}} dy$. 由此得 $(1-a)^{\frac{3}{2}} - 1 = -(1-a)^{\frac{3}{2}}$. 解得 $a = 1 - (\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}$.

22、解: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$.

由题意得 $f'(-1) = 0$ 、 $f''(1) = 0$ 、 $f(1) = 2$, 解得 $a = -1$ 、 $b = 3$ 、 $c = 9$

23、证明: 积分域 $D: \begin{cases} a \leq y \leq b \\ y \leq x \leq b \end{cases}$, 积分域又可表示成 $D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_a^b dy \int_y^b f(x) e^{2x+y} dx &= \iint_D f(x) e^{2x+y} = \int_a^b dx \int_a^x f(x) e^{2x+y} dy = \int_a^b f(x) e^{2x} dx \int_a^x e^{2y} dy \\ &= \int_a^b f(x) e^{2x} (e^x - e^a) dx = \int_a^b (e^{3x} - e^{2x+a}) f(x) dx. \end{aligned}$$

24、证明: 令 $F(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$, 显然, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续. 由于 $F'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$,

故 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

于是, 当 $0 < x < 1$ 时, $F(x) < F(1) = 0$, 即 $\ln x < \frac{x-1}{x+1}$, 又 $x^2 - 1 < 0$, 故 $(x^2 - 1) \ln x > (x-1)^2$;

当 $x \geq 1$ 时, $F(x) \geq F(1) = 0$, 即 $\ln x \geq \frac{x-1}{x+1}$, 又 $x^2 - 1 \geq 0$, 故 $(x^2 - 1) \ln x \geq (x-1)^2$.

综上所述, 当 $x > 0$ 时, 总有 $(x^2 - 1) \ln x \geq (x-1)^2$.

2008 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、B 2、A 3、D 4、C 5、A 6、B 7、0 8、3 9、(2, 17)

10、 $-\cos x + \frac{1}{2}x + c$ 11、 π 12、 $[-2, 2]$

13、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x-2}{x})^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{x})^{\frac{x}{2} \cdot 6}$, 令 $y = -\frac{x}{2}$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x-2}{x})^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^{-y \cdot 6} = \frac{1}{e^6}.$$

14、 $y'(t) = \sin t$, $x'(t) = 1 - \cos t$, $y''(t) = \cos t$, $x''(t) = \sin t$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3} = \frac{-1}{(1 - \cos t)^2}.$$

$$15、\int \frac{x^3}{x+1} dx = \int \frac{x^3+1}{x+1} dx - \int \frac{d(x+1)}{x+1} dx = \int (x^2 - x + 1) dx - \ln|x+1| + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C.$$

$$16、\int_0^1 e^{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_0^1 e^{x^{\frac{1}{2}}} d(x^{\frac{1}{2}})^2 = 2 \int_0^1 e^{x^{\frac{1}{2}}} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx^{\frac{1}{2}} = 2 \int_0^1 e^{x^{\frac{1}{2}}} dx^{\frac{1}{2}} = 2(x^{\frac{1}{2}} e^{x^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x^{\frac{1}{2}}} dx^{\frac{1}{2}})$$

$$= 2e - 2 \int_0^1 e^{x^{\frac{1}{2}}} dx^{\frac{1}{2}} = 2e - 2e^{x^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^1 = 2e - 2e + 2 = 2.$$

$$17、由题意得：\vec{AB} = (-2, 3, 0), \vec{AC} = (-2, 0, 5), 那么法向量为$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (15, 10, 6).$$

$$18、\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 - \frac{y}{x^2} f'_2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{11} + \frac{1}{2} f''_{12} - \frac{y}{x^2} (f''_{21} + \frac{1}{x} f''_{22})$$

$$= f''_{11} + \frac{1}{x} f''_{12} - \frac{1}{x^2} f''_2 - \frac{y}{x^2} f''_{21} - \frac{y}{x^3} f''_{22}$$

$$19、\iint_D x^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^1 x^2 dy$$

$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

$$20、积分因子为 \mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{化简原方程 } xy' = 2y + x^2 \text{ 为 } \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x.$$

$$\text{在方程两边同乘以积分因子 } \frac{1}{x^2}, \text{ 得到 } \frac{dy}{x^2 dx} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x}.$$

$$\text{化简得: } \frac{d(x^{-2}y)}{dx} = \frac{1}{x}.$$

$$\text{等式两边积分得到通解 } \int \frac{d(x^{-2}y)}{dx} = \int \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{故通解为 } y = x^2 \ln|x| + x^2 C$$

21、令 $F(x, y) = \frac{1}{x} - y$ ，那么 x 和 y 的偏导分别为 $F_x(x_0, y_0) = \frac{-1}{x_0^2}$ ， $F_y(x_0, y_0) = -1$ 。

所以过曲线上任一点 (x_0, y_0) 的切线方程为：
$$\frac{x - x_0}{x_0^2} + \frac{y - y_0}{1} = 0.$$

当 $x=0$ 时， y 轴上的截距为 $y = \frac{1}{x_0} + y_0$ 。

当 $y=0$ 时， x 轴上的截距为 $x = x_0^2 y_0 + x_0$ 。

令 $F(x_0, y_0) = \frac{1}{x_0} + y_0 + x_0^2 y_0 + x_0$ ，那么即是求 $F(x_0, y_0)$ 的最小值。

而 $F(x_0, y_0) = \frac{1}{x_0} + x_0 + \frac{1}{x_0} + x_0 = 2(\frac{1}{x_0} + x_0) \geq 4$ ，故当 $x_0 = y_0 = 1$ 时，取到最小值 4。

22、(1)
$$V = \pi \int_0^1 (4x^4 - x^4) dx = \frac{3\pi x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{5}.$$

(2) 由题意得到等式：
$$\int_0^a (2x^2 - x^2) dx = \int_a^1 (2x^2 - x^2) dx$$

化简得：
$$\int_0^a x^2 dx = \int_a^1 x^2 dx.$$

解出 a ，得到：
$$a^3 = \frac{1}{2}, \text{ 故 } a = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}.$$

23、令 $g(x) = f(x+a) - f(x)$ ，那么 $g(a) = f(2a) - f(a)$ ， $g(0) = f(a) - f(0)$ 。

由于 $g(a)g(0) < 0$ ，并且 $g(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续。

故存在 $\xi \in (0, a)$ ，使得 $g(\xi) = 0$ ，即 $f(\xi) = f(\xi + a)$ 。

24、将 e^x 用泰勒公式展开得到：
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$$

代入不等式左边：
$$(1-x)e^x = (1-x)(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \dots \leq 1$$

2009 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、A 2、B 3、C 4、B 5、D 6、C 7、 $\ln 2$ 8、 $4xe^{2x}$

9、 $\frac{\pi}{3}$ 10、 $-\frac{z^2}{2xz+y}$ 11、2 12、 $\ln|x| + \frac{1}{2}x^2 = 2\ln|y| - y + C$

$$13、\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} = 6, .$$

$$14、dx = \frac{1}{1+t} dt, dy = (2t+2)dt, \frac{dy}{dx} = \frac{(2t+2)dt}{\frac{1}{1+t}dt} = 2(t+1)^2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{4(t+1)dt}{\frac{1}{1+t}dt} = 4(t+1)^2.$$

$$15、\text{令 } \sqrt{2x+1} = t, x = \frac{t^2-1}{2}, \int \sin \sqrt{2x+1} dx = \int \sin t \cdot t dt = -\int t d \cos t = -t \cos t + \int \cos t dt$$

$$= -t \cos t + \sin t + C = -\sqrt{2x+1} \cos \sqrt{2x+1} + \sin \sqrt{2x+1} + C$$

$$16、\text{令 } x = \sqrt{2} \sin \theta, \text{ 当 } x=0, \theta=0; \text{ 当 } x=1, \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos \theta} \sqrt{2} \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$17、\text{已知直线的方向向量为 } s_0 = (3, 2, 1), \text{ 平面的法向量为 } n_0 = (1, 1, 1). \text{ 由题意, 所求平面的法}$$

$$\text{向量可取为 } n = s_0 \times n_0 = (3, 2, 1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -2, 1). \text{ 又显然点 } (0, 1, 2) \text{ 在所求平面}$$

$$\text{上, 故所求平面方程为 } 1(x-1) + (-2)(y-1) + 1(z-2) = 0, \text{ 即 } x - 2y + z = 0.$$

$$18、\iint_D y d\sigma = \iint_D \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_{\sqrt{2}}^{2 \cos \theta} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (8 \csc^2 \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{3} (-8 \cot \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta) \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$19、\frac{\partial z}{\partial x} = f_1' \cdot \cos x + f_2' \cdot y; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_2' + x \cos x \cdot f_{12}'' + xy f_{22}''$$

$$20、\text{积分因子为 } \mu(x) = e^{\int \frac{-2}{x} dx} = e^{\ln|x|^{-2}} = \frac{1}{x^2}.$$

化简原方程 $xy' = 2y + x^2$ 为 $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x$.

在方程两边同乘以积分因子 $\frac{1}{x^2}$, 得到 $\frac{dy}{x^2 dx} - \frac{2y}{x^3} = \frac{1}{x}$.

化简得: $\frac{d(x^{-2}y)}{dx} = \frac{1}{x}$.

等式两边积分得到通解 $\int \frac{d(x^{-2}y)}{dx} = \int \frac{1}{x} dx$.

故通解为 $y = x^2 \ln|x| + x^2 C$

21、(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f'(x) = 3x^2 - 3$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \pm 1$, 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, 单调减区间为 $[-1, 1]$, 极大值为 $f(-1) = 3$, 极小值为 $f(1) = -1$.

(2) $f''(x) = 6x$, 令 $f''(x) = 0$, 得 $x = 0$, 曲线 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上是凸的, 在 $[0, +\infty)$ 上是凹的, 点 $(0, 1)$ 为拐点.

(3) 由于 $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $f(3) = 19$, 故函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-2, 3]$ 上的最大值为 $f(3) = 19$, 最小值为 $f(1) = f(-2) = -1$.

22、(1) $V_1 = \pi a^2 \cdot 2a^2 - \int_0^{2a^2} \pi x^2 dy = \pi a^4$. $V_2 = \int_a^2 \pi (2x^2)^2 dy = \frac{4}{5} \pi (32 - a^5)$.

(2) $A_1 = \int_0^a 2x^2 dx = \frac{2}{3} a^3$. $A_2 = \int_a^2 2x^2 dx = \frac{2}{3} (8 - a^3)$. 由 $A_1 = A_2$ 得 $a = \sqrt[3]{4}$.

23、证 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$, 且 $f(0) = 1$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1-1}{x} = 1$, 所以

$f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. 由于 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

24、证 令 $f(x) = 4x \ln x - x^2 - 2x + 3$, 则 $f'(x) = 4 \ln x - 2x + 2$, $f''(x) = \frac{4}{x} - 2 = \frac{4-2x}{x}$,

由于当 $1 < x < 2$ 时, $f''(x) > 0$, 故函数 $f'(x)$ 在 $[1, 2)$ 上单调增加, 从而当 $1 < x < 2$ 时

$f'(x) > f'(1) = 0$, 于是函数 $f(x)$ 在 $[1, 2)$ 上单调增加, 从而当 $1 < x < 2$ 时, $f(x) > f(1) = 0$,

即当 $1 < x < 2$ 时, $4x \ln x > x^2 + 2x - 3$

2010 年江苏省普通高校“专转本”统一考试高等数学参考答案

1、A 2、C 3、B 4、D 5、D 6、C

7、 e^2 8、2 9、 $\frac{\pi}{2}$ 10、-4 11、 $dx + 2dy$ 12、 $(-1, 1]$

$$13、\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan^2 x}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

$$14、\frac{dy}{dx} + e^{x+y} \left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 2, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2 - e^{x+y}}{1 + e^{x+y}}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{9e^{x+y}}{(1 + e^{x+y})^3}$$

$$15、\text{原式} = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

$$16、\text{变量替换: 令 } \sqrt{2x+1} = t, \quad x = \frac{t^2 - 1}{2}, \quad dx = t dt,$$

$$\text{原式} = \int_1^3 \frac{\frac{t^2 - 1}{2} + 3}{t} \cdot t dt = \int_1^3 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{5}{2}\right) dt = \left(\frac{1}{6} t^3 + \frac{5}{2} t\right) \Big|_1^3 = \frac{28}{3}$$

$$17、\vec{n}_1 = (1, 2, 3), \quad \vec{n}_2 = (2, 0, -1), \quad \vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 7, -4),$$

$$\text{所求直线方程为 } \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{-4}$$

$$18、\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(f_1' y + f_2' e^x); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3y^2 f_1' + 2e^x y f_2' + xy^3 f_{11}'' + xy^2 e^x f_{12}''$$

$$19、\iint_D x dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} x dx = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

20、特征方程的两个根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 从而 $p = 1, q = -2$;

$\omega = 1$ 是特征方程的单根, $p(x) = 1$, 可设 $Q(x) = Ax$, 即设特解为 $Y = Axe^x$,

$Y' = Ae^x + Axe^x, Y'' = 2Ae^x + Axe^x, p = 1, q = -2$, 代入方程 $y'' + py' + qy = e^x$ 得

$$(2A + Ax + A + Ax - 2A)e^x = e^x, \quad 3A = 1, A = \frac{1}{3}, \quad \text{通解为 } y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{3} x$$

21、构造函数 $f(x) = e^{x-1} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $f'(x) = e^{x-1} - x$, $f''(x) = e^{x-1} - 1 > 0$, $f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$

上单调递增, $f'(1) = 0$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $f(1) = 0$, $f(x) > 0$, 即 $e^{x-1} > \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 。

22、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = 1 = f(0)$, 连续性得证;

$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\varphi(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x) - 1}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi'(x) - \varphi'(0)}{x - 0}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi''(x) = \frac{1}{2} \varphi''(0)$, 可导性得证。

23、 $V_1(a) = \pi \int_0^a [(a^2)^2 - (x^2)^2] dx = \frac{4}{5} \pi a^5$,

$V_2(a) = \pi \int_a^1 [(x^2)^2 - (a^2)^2] dx = (\frac{1}{5} - a^4 + \frac{4}{5} a^5) \pi$,

$V(a) = V_1(a) + V_2(a) = (\frac{1}{5} - a^4 + \frac{8}{5} a^5) \pi$,

$V'(a) = (8a^4 - 4a^3) \pi$, 令 $V'(a) = 0$ 得 $a = \frac{1}{2}$, 最小值为 $V(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16} \pi$

24、 $f(x) = e^{-\int dx} (\int 2e^x e^{\int dx} dx + C) = e^{-x} (e^{2x} + C) = e^x + Ce^{-x}$,

$f(0) = 2, C = 1$, $f(x) = e^x + e^{-x}$, $f'(x) = e^x - e^{-x}$,

$y = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x} + 1 - 2}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$,

$A(t) = \int_0^t (1 - (1 - \frac{2}{e^{2x} + 1})) dx = \int_0^t \frac{2}{e^{2x} + 1} dx = \int_0^t \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1} d2x = \int_0^t 1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} d2x$

$= 2t - \int_0^t \frac{1}{e^{2x} + 1} d(e^{2x} + 1) = 2t - \ln(e^{2t} + 1) + \ln 2 = \ln e^{2t} - \ln(e^{2t} + 1) + \ln 2 = \ln \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}} + \ln 2$

从而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln \frac{e^{2t}}{1 + e^{2t}} + \ln 2) = \ln 2$

江苏省 2011 年普通高校“专转本”统一考试

高等数学 试卷

注意事项:

1、考生务必将密封线内的各项目及第 2 页右下角的座位号填写清楚。

2、考生须用钢笔或圆珠笔将答案直接答在试卷上，答在草稿纸上无效。

3、本试卷共 8 页，五大题 24 小题，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $f(x) = e^x - x - 1$ 是函数 $g(x) = x^2$ 的()

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小 C. 同阶无穷小 D. 等价无穷小

2、设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 + h)}{h} = 4$ ，则 $f'(x_0) = ()$

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

3、若点 $(1, -2)$ 是曲线 $y = ax^3 - bx^2$ 的拐点，则()

- A. $a=1, b=3$ B. $a=-3, b=-1$ C. $a=-1, b=-3$ D. $a=4, b=6$

4、设 $z = f(x, y)$ 为由方程 $z^3 - 3yz + 3x = 8$ 所确定的函数，则 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = ()$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

5、如果二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 可化为二次积分 $\int_0^1 dy \int_{y+1}^2 f(x, y) dx$ ，则积分域 D 可表示为

()

- A. $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 1\}$ B. $\{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, x-1 \leq y \leq 1\}$
C. $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x-1 \leq y \leq 0\}$ D. $\{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x-1\}$

6、若函数 $f(x) = \frac{1}{2+x}$ 的幂级数展开式为 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($-2 < x < 2$)，则系数 $a_n = ()$

- A. $\frac{1}{2^n}$ B. $\frac{1}{2^{n+1}}$ C. $\frac{(-1)^n}{2^n}$ D. $\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

7、已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{kx} = e^2$ ，则 $k =$ _____。

8、设函数 $\Phi(x) = \int_0^{x^2} \ln(1+t) dt$ ，则 $\Phi''(1) =$ _____。

9、若 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ ，则 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ _____。

10、设函数 $y = \arctan \sqrt{x}$ ，则 $dy|_{x=1} =$ _____。

11、定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + 1) \sin^2 x dx$ 的值为_____。

12、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域为_____。

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

13、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{\ln(1+x^2)}$ 。

14、设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + t \\ e^y + y = t^2 \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

15、设 $f(x)$ 的一个原函数为 $x^2 \sin x$ ，求不定积分 $\int \frac{f(x)}{x} dx$ 。

16、计算定积分 $\int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} dx$ 。

17、求通过 x 轴与直线 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$ 的平面方程。

18、设 $z = xf(\frac{y}{x}, y)$ ，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

19、计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{2-x^2}$, 直线 $y = -x$ 及 y 轴所围成的平面闭区域。

20、已知函数 $y = (x+1)e^x$ 是一阶线性微分方程 $y' + 2y = f(x)$ 的解, 求二阶常系数线性微分方程 $y'' + 3y' + 2y = f(x)$ 的通解。

四、证明题 (本大题共 2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

21、证明: 方程 $x \ln(1+x^2) = 2$ 有且仅有一个小于 2 的正实根。

22、证明: 当 $x > 0$ 时, $x^{2011} + 2010 \geq 2011x$ 。

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

23、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - x^2 - ax - 1}{x \arctan x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{e^{ax} - 1}{\sin 2x} & x > 0 \end{cases}$ ，问常数为何值时，

(1) $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点？

(2) $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点？

(3) $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点？

24、设函数 $f(x)$ 满足微分方程 $xf'(x) - 2f(x) = -(a+1)x$ (其中 a 为正常数)，且 $f(1) = 1$ ，由曲线 $y = f(x) (x \leq 1)$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围成的平面图形记为 D 。已知 D 的面积为 $\frac{2}{3}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式；

(2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V_x ；

(3) 求平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V_y 。

江苏省 2012 年普通高校“专转本”选拔考试

高等数学 试题卷 (二年级)

注意事项：出卷人：江苏建筑大学-张源教授

- 1、考生务必将密封线内的各项目及第 2 页右下角的座位号填写清楚。
- 2、考生须用钢笔或圆珠笔将答案直接答在试卷上，答在草稿纸上无效。
- 3、本试卷共 8 页，五大题 24 小题，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

二、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x \sin \frac{1}{x} + \frac{\sin 3x}{x}) = (\quad)$

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 5

2、设 $f(x) = \frac{(x-2)\sin x}{|x|(x^2-4)}$, 则函数 $f(x)$ 的第一类间断点的个数为()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3、设 $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{3}{2}}$, 则函数 $f(x)$ ()

- A. 只有一个最大值 B. 只有一个极小值
C. 既有极大值又有极小值 D. 没有极值

4、设 $z = \ln(2x) + \frac{3}{y}$ 在点 (1,1) 处的全微分为 ()

- A. $dx - 3dy$ B. $dx + 3dy$ C. $\frac{1}{2}dx + 3dy$ D. $\frac{1}{2}dx - 3dy$

5、二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$ 在极坐标系下可化为()

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho$ B. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$
C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho$ D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sec \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho$

6、下列级数中条件收敛的是()

- A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\frac{3}{2})^n$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

7 要使函数 $f(x) = (1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续，则需补充定义 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8、设函数 $y = x(x^2 + 2x + 1)^2 + e^{2x}$, 则 $y^{(7)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9、设 $y = x^x (x > 0)$, 则函数 y 的微分 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

10、设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 互相垂直, 且 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

11、设反常积分 $\int_a^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

12、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n} (x-3)^n$ 的收敛域为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

13、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^3 \ln(1+x)}$.

14、设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \frac{1}{t} \\ y = t^2 + 2\ln t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

15、求不定积分 $\int \frac{2x+1}{\cos^2 x} dx$.

16、计算定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$.

17、已知平面 Π 通过 $M(1,2,3)$ 与 x 轴, 求通过 $N(1,1,1)$ 且与平面 Π 平行, 又与 x 轴垂直的直线方程.

18、设函数 $z = f(x, xy) + \varphi(x^2 + y^2)$ ，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 φ 具有二阶连续

导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

19、已知函数 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^x ，求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = f(x)$ 的通解。

20、计算二重积分 $\iint_D y dx dy$ ，其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{x-1}$ ，直线 $y = \frac{1}{2}x$ 及 x 轴所围成的平面闭区域。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

21、在抛物线 $y = x^2 (x > 0)$ 上求一点 P ，使该抛物线与其在点 P 处的切线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{2}{3}$ ，并求该平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

22、已知定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足方程 $xf(x) - 4\int_1^x f(t)dt = x^3 - 3$ ，试求：

- (1) 函数 $f(x)$ 的表达式；
- (2) 函数 $f(x)$ 的单调区间与极值；
- (3) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点.

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

23、证明：当 $0 < x < 1$ 时， $\arcsin x > x + \frac{1}{6}x^3$.

24、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x g(t)dt}{x^2} & x \neq 0 \\ g(0) & x = 0 \end{cases}$ ，其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1 - \cos x} = 3$ 证明：

函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) = \frac{1}{2}$.

一. 选择题

1-5 B C C A B D

二. 填空题

7-12 e^{-2} 128 $x^n(1 + \ln x)dx$ $5 \ln 2$ $(0, 6]$

三. 计算题

13、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^3 \ln(1+x)}$.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2\cos x - 2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{6x^2} = \frac{1}{12}$$

14、设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t - \frac{1}{t} \\ y = t^2 + 2 \ln t \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\text{原式} = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t + \frac{2}{t}}{1 + \frac{1}{t^2}} = 2t \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{2t^2}{t^2 + 1}$$

15、求不定积分 $\int \frac{2x+1}{\cos^2 x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{2x+1}{\cos^2 x} dx = \int (2x+1) d \tan x = (2x+1) \tan x - \int \tan x d(2x+1) \\ &= (2x+1) \tan x - 2 \int \tan x dx = (2x+1) \tan x + 2 \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

16、计算定积分 $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$.

$$\text{原式} = \text{令 } \sqrt{2x-1} = t, \text{ 则原式} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{\frac{1+t^2}{2}t} dt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctan t \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

17、已知平面 Π 通过 $M(1,2,3)$ 与 x 轴，求通过 $N(1,1,1)$ 且与平面 Π 平行，又与 x 轴垂直的直线方程.

解：平面 Π 的法向量 $\vec{n} = \vec{OM} \times \vec{i} = (0, 3, -2)$ ，直线方向向量为 $\vec{S} = \vec{n} \times \vec{i} = (0, -2, -3)$ ，

$$\text{直线方程：} \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-3}$$

18、设函数 $z = f(x, xy) + \varphi(x^2 + y^2)$ ，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 φ 具有二阶连续

导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$\text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 + f'_2 \cdot y + \varphi' \cdot 2x \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{12} \cdot x + f'_2 + xyf''_{22} + 2x \cdot 2y \cdot \varphi''$$

19、已知函数 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^x , 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = f(x)$ 的通解.

解: $f(x) = (xe^x)' = (x+1)e^x$, 先求 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解, 特征方程: $r^2 + 4r + 4 = 0$,

$r_{1,2} = -2$, 齐次方程的通解为 $Y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$. 令特解为 $y^* = (Ax + B)e^x$,

代入原方程得: $9Ax + 6A + 9B = x + 1$, 有待定系数法得:

$$\begin{cases} 9A = 1 \\ 6A + 9B = 1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} A = \frac{1}{9} \\ B = \frac{1}{27} \end{cases}, \text{所以通解为 } Y = (C_1 + C_2x)e^{-2x} + \left(\frac{1}{9}x + \frac{1}{27}\right)e^x$$

20、计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{x-1}$, 直线 $y = \frac{1}{2}x$ 及 x 轴所围成的平面闭区域.

$$\text{原式} = \int_0^1 y dy \int_{2y}^{y^2+1} dx = \frac{1}{12}.$$

四. 综合题

21、在抛物线 $y = x^2 (x > 0)$ 上求一点 P , 使该抛物线与其在点 P 处的切线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{2}{3}$, 并求该平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

解: 设 P 点 $(x_0, x_0^2) (x_0 > 0)$, 则 $k_{\text{切}} = 2x_0$, 切线: $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$

即, $y + x_0^2 = 2x_0x$, 由题意 $\int_0^{x_0^2} \left(\frac{y+x_0^2}{2x_0} - \sqrt{y}\right) dy = \frac{2}{3}$, 得 $x_0 = 2$, $P(2, 4)$

$$V_x = \pi \int_0^2 x^4 dx - \pi \int_1^2 (4x - 4)^2 dx = \frac{16}{15} \pi$$

22、已知定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$ 满足方程 $xf(x) - 4\int_1^x f(t)dt = x^3 - 3$ ，试求：

(1) 函数 $f(x)$ 的表达式；

(2) 函数 $f(x)$ 的单调区间与极值；

(3) 曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点。

解：(1) 已知 $xf(x) - 4\int_1^x f(t)dt = x^3 - 3$ 两边同时对 x 求导得： $f(x) + xf'(x) - 4f(x) = 3x^2$

即： $y' - \frac{3}{x}y = 3x$ ，则 $y = -3x^2 + cx^3$ 由题意得： $f(1) = -2$ ， $c = 1$ ，则 $f(x) = -3x^2 + x^3$

(2) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0, x_1 = 0, x_2 = 2$ 列表讨论得在 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 单调递增，在 $(0, 2)$ 单调递减。极大值 $f(0) = 0$ ，极小值 $f(2) = -4$

(3) $f''(x) = 6x - 6 = 0, x = 1$

列表讨论得在 $(-\infty, 1)$ 凹，在 $(1, +\infty)$ 凸。拐点 $(1, -2)$

五、证明题

23、证明：当 $0 < x < 1$ 时， $\arcsin x > x + \frac{1}{6}x^3$ 。

解：令 $f(x) = \arcsin x - x - \frac{1}{6}x^3$ ， $f(0) = 0$ ， $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 - \frac{1}{2}x^2$ ， $f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} - x = x(\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} - 1) > 0$ ，在 $0 < x < 1$ ， $f'(x)$ 单调递增，

$f'(x) > f'(0) = 0$ ，所以在 $0 < x < 1$ ， $f(x)$ 单调递增，则有 $f(x) > f(0) = 0$ ，得证。

24、设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x g(t)dt}{x^2} & x \neq 0 \\ g(0) & x = 0 \end{cases}$ ，其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1 - \cos x} = 3$ 证明：

函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) = \frac{1}{2}$ 。

解：因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{1 - \cos x} = 3$ ，即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\frac{1}{2}x^2} = 3$ 所以有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = \frac{3}{2}$

又因为 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，所以 $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ，则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^2} - g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x g(t) dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

江苏省 2013 年普通高校“专转本”选拔考试

高等数学 试题卷（二年级）

注意事项：

1、本试卷分为试题卷和答题卡两部分，试题卷共 3 页，全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

2、必须在答题卡上作答，作答在试题卷上无效。作答前务必将自己的姓名和准考证号准确清晰地填在试题卷和答题卡上的指定位置。

3、考试结束时，须将试题卷和答题卡一并交回。

三、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分。在下列每小题中，选出一个正确答案，请在答题卡上将所选项的字母标号涂黑）

1、当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $f(x) = \ln(1+x) - x$ 是函数 $g(x) = x^2$ 的()

- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小 C. 同阶无穷小 D. 等价无穷小

2、曲线 $y = \frac{2x^2 + x}{x^2 - 3x + 2}$ 的渐近线共有()

- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

3、已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ ，则点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的

- A. 跳跃间断点 B. 可去间断点 C. 无穷间断点 D. 连续点

4、设 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ，其中 f 具有二阶导数，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

- A. $-\frac{1}{x^2} f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right)$ B. $\frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

C. $-\frac{1}{x^2} f''(\frac{1}{x}) - \frac{2}{x^3} f'(\frac{1}{x})$ D. $\frac{1}{x^4} f''(\frac{1}{x}) - \frac{2}{x^3} f'(\frac{1}{x})$

5、下列级数中收敛的是

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^n$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n}$

6、已知函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

A. $y=x-1$ B. $y=2x-2$ C. $y=3x-3$ D. $y=4x-4$

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

7、设函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续, 则常数 $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

8、已知空间三点 $A(1,1,1), B(2,3,4), C(3,4,5)$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

9、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=t^3-1 \end{cases}$ 所确定, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=1} = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

10、设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 互相垂直, 且 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2$, 则 $|\vec{a}+2\vec{b}| = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

11、设 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{\frac{1}{x}} = e$, 则常数 $a = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

12、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n$ 的收敛域为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

13、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$.

14、设函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $z^3+3xy-3z=1$ 所确定, 求 dz 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

15、求不定积分 $\int x^2 \cos 2x dx$.

16、计算定积分 $\int_0^2 \frac{dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$.

17、设函数 $z = f(x^2, e^{2x+3y})$ ，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 。

18、已知直线 $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x-3y-z+3=0 \end{cases}$ 平面 Π 上，又知直线 $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=3+2t \end{cases}$ 与平面 Π 平行，求平面 Π 的方程。

19、已知函数 $y = f(x)$ 是一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = y$ 满 $y(0)=1$ 的特解，求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ 的通解。

20、计算二重积分 $\iint_D x dx dy$ ，其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{4-x^2} (x > 0)$ 与三条直线 $y = x, x = 3, y = 0$ 所围成的平面闭区域。

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

21、设平面图形 D 由曲线 $x = 2\sqrt{y}$ ， $y = \sqrt{-x}$ 与直线 $y = 1$ 围成，试求：

- (1) 平面图形 D 的面积；
- (2) 平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

22、已知 $F(x) = \int_0^{x^2} (9t^{\frac{1}{3}} - 5t^{\frac{1}{2}}) dt$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点。

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

23、证明：当 $x > 1$ 时， $(1 + \ln x)^2 < 2x - 1$ 。

24、设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，证明：函数 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)] dx$ 。

江苏省 2013 年普通高校“专转本”统一考试

高等数学（二年级） 试卷答案

一、选择题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1、C 2、C 3、B 4、B 5、D 6、A

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

7、0 8、 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 9、 $\frac{3}{4}$ 10、2 11、 $y = x \ln x + cx$ 12、 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

13、原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x - \frac{1}{1+x}}{2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^x + xe^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

14、令 $F(x, y, z) = z^3 + 3xy - 3z - 1, F'_x = 3y, F'_y = 3x, F'_z = 3z^2 - 3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3y}{3z^2 - 3} = \frac{y}{1-z^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{3x}{3z^2 - 3} = \frac{x}{1-z^2}, \therefore dz = \frac{y}{1-z^2} dx + \frac{x}{1-z^2} dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{y}{1-z^2})}{\partial x} = \frac{-y(-2z)\frac{\partial z}{\partial x}}{(1-z^2)^2} = \frac{2yz\frac{y}{1-z^2}}{(1-z^2)^2} = \frac{2y^2z}{(1-z^2)^3}$$

15、 $\int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int x^2 d \sin 2x = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} \int x d \cos 2x$
 $= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

16、令 $x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t dt, x = 0, t = 0; x = 2, t = \frac{\pi}{2},$

$$\text{则原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos t}{2 + 2 \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1 + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{t}{2}}) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} d \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2} - \tan \frac{t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

17、 $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_2 \cdot e^{2x+3y} \cdot 3, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (f''_{21} \cdot 2x + f''_{22} \cdot 2e^{2x+3y}) \cdot 3e^{2x+3y} + 6e^{2x+3y} f'_2$

18、直线方向向量 $\vec{S}_1 = (1, -1, 1) \times (1, -3, -1) = (4, 2, -2), \vec{S}_2 = (-3, 1, 2),$ 平面 Π 的法向量
 $\vec{n} = \vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = (4, 2, -2) \times (-3, 1, 2) = (6, -2, 10),$ 在第一条直线上任取一点 $(1, 1, 1),$ 该点也在平面上,
 所以平面方程为 $6(x-1) + (-2)(y-1) + 10(z-1) = 0$ 即 $3x - y + 5z - 7 = 0$

19、由 $\frac{dy}{dx} = y$ 得 $\frac{1}{y} dy = dx, \int \frac{1}{y} dy = \int dx, \ln |y| = x + C_1, |y| = e^{x+C_1} = e^{C_1} e^x, y = \pm e^{C_1} e^x = C e^x,$ 由

$y(0) = 1$ 得 $C = 1,$ 所以 $y = e^x,$ 即 $y'' - 3y' + 2y = e^x, r^2 - 3r + 2 = 0, r_1 = 1, r_2 = 2,$

齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$ 令特解为 $y^* = x A e^x, y^{*'} = A e^x + x A e^x,$

$y^{*''} = A e^x + A e^x + x A e^x,$ 代入原方程得: $-A e^x = e^x, A = -1,$

所以通解为 $y = Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x$

$$\begin{aligned} 20、原式 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{\frac{\cos\theta}{2}}^{\frac{3}{2}} r \cos\theta r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \frac{r^3}{3} \Big|_{\frac{\cos\theta}{2}}^{\frac{3}{2}} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{27}{\cos^2\theta} - 8\cos\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{3} (27 \tan\theta - 8\sin\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \left(27 \tan\frac{\pi}{4} - 8\sin\frac{\pi}{4} \right) = 9 - \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

四、综合题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

$$21、(1) S = \int_0^1 (2\sqrt{y} + y^2) dy = \left(2 \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{3}$$

(2)

$$V_x = \pi \int_{-1}^0 [1 - (\sqrt{-x})^2] dx + \pi \int_0^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \right] dx = \pi \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \pi \left(x - \frac{x^5}{80} \right) \Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{5} = \frac{21\pi}{10}$$

$$22、f(x) = 2x(9x^{\frac{2}{3}} - 5x) = 18x^{\frac{5}{3}} - 10x^2, f'(x) = 30x^{\frac{2}{3}} - 20x, f''(x) = 20x^{-\frac{1}{3}} - 20 = 0, \text{解得}$$

$x=1$ ，另外 $x=0$ 为二导不存在的点，通过列表分析得：在 $(-\infty, 0), (1, +\infty)$ 凸，在 $(0, 1)$ 凹，

拐点为 $(0, 0), (1, 8)$ 。

五、证明题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

$$23、令 f(x) = 2x - 1 - (1 + \ln x)^2, f(1) = 0.$$

$$f'(x) = 2 - 2(1 + \ln x) \frac{1}{x}, f'(1) = 0. f''(x) = -2 \frac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = \frac{2 \ln x}{x^2} > 0, \text{在 } x > 1 \text{ 时}.$$

$\therefore f'(x)$ 单调递增， $f'(x) > f'(1) = 0, \therefore f(x)$ 单调递增， $f(x) > f(1) = 0$ ，证毕。

$$\begin{aligned} 24、\int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(a+b-x)] dx &\stackrel{\text{令 } a+b-x=u}{=} \int_b^{\frac{a+b}{2}} f(u) d(a+b-u) \\ &= -\int_b^{\frac{a+b}{2}} f(u) du = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(u) du = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \\ \therefore \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)] dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(a+b-x) dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

江苏省 2014 年普通高校专转本选拔考试

高等数学 试题卷

注意事项:

1. 本试卷分为试题卷和答题卡两部分, 试题卷共 3 页, 全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 必须在答题卡上作答, 作答在试卷上无效. 作答前务必将自己的姓名和准考证号准确清晰地填写在试题卷和答题卡上的指定位置.
3. 本试卷共 8 页, 五大题 24 小题, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

四、单项选择题(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 在下列每小题中, 选出一个正确答案, 请在答题卡上将所选项的字母标号涂黑)

1. 若是 $x=1$ 函数 $f(x)=\frac{x^2-4x+a}{x^2-3x+2}$ 的可去间断点, 则常数 $a=(\quad)$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2. 曲线 $y=x^4-2x^3$ 的凹凸区间为($\quad$)
A. $(-\infty, 0], [1, +\infty)$ B. $[0, 1]$ C. $(-\infty, \frac{3}{2}]$ D. $[\frac{3}{2}, +\infty)$
3. 若函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $x\sin x$, 则 $\int f''(x)dx=(\quad)$
A. $x\sin x+C$ B. $2\cos x-x\sin x+C$
C. $\sin x-x\cos x+C$ D. $\sin x+x\cos x+C$
4. 已知函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $z^3-3xyz+x^3-2=0$ 所确定, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1 \\ y=0}}=(\quad)$
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
5. 二次积分 $\int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y)dy$ 交换积分次序后得($\quad$)
A. $\int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y)dx$ B. $\int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x, y)dx$
C. $\int_0^1 dy \int_{2-y}^2 f(x, y)dx$ D. $\int_0^2 dy \int_1^{2-y} f(x, y)dx$
6. 下列级数发散的是($\quad$)
A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ C. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n^2})$ D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

7. 曲线 $y=\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ 的水平渐近线的方程为_____.
8. 设函数 $f(x)=ax^3-9x^2+12x$ 在 $x=2$ 处取得极小值, 则 $f(x)$ 的极大值为_____.
9. 定积分 $\int_{-1}^1 (x+1)\sqrt{1-x^2}dx$ 的值为_____.

10. 函数 $z = \arctan \frac{y}{x}$ 的全微分 $dz =$ _____.

11. 设向量 $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, -1)$, 则 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 的夹角为_____.

12. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为_____.

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \arcsin x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

14. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = (t+1)e^{2t} \\ e^y + ty = e \end{cases}$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$.

15. 求不定积分 $\int x \ln^2 x dx$.

16. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3} dx$.

17. 求平行于 x 轴且通过两点 $M(1, 2, 3)$ 与 $N(2, 3, 4)$ 的平面方程.

18. 设函数 $z = f(\sin x, x^2 - y^2)$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

19. 计算二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 是由三直线 $y = -x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域.

20. 求微分方程 $y'' - 2y' = xe^{2x}$ 的通解.

四、证明题 (本大题共 2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

21. 证明: 方程 $x \ln x = 3$ 在区间 $(2, 3)$ 内有且仅有一个实根.

22. 证明: 当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 > \frac{1}{2}x^2 + \ln(x+1)$.

五、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

23. 设平面图形 D 由抛物线 $y = 1 - x^2$ 及其在点 $(1, 0)$ 处的切线以及 y 轴所围成, 试求:

(1) 平面图形 D 的面积;

(2) 平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

24. 设 $\varphi(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 且满足方程 $\int_0^x t \varphi(t) dt = 1 - \varphi(x)$,

(1) 求函数 $\varphi(x)$ 的表达式;

(2) 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-1}{x^2}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

江苏省 2014 年普通高校专转本选拔考试

高等数学 参考答案

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

1、C 2、B 3、B 4、A 5、D 6、D

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

7、 $y = e^{-2}$ 8、5 9、 $\frac{\pi}{2}$ 10、 $dz = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ 11、 $\frac{\pi}{3}$ 12、 $[0, 2)$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分)

$$13、\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^2 \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2} 3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{1-x^2} 3x^2} = -\frac{1}{6}$$

$$14、\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{y}{e^y+t}}{e^{2t}(3+2t)}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = -\frac{1}{3e}.$$

$$15、\int x \ln^2 x dx = \frac{1}{2} \int \ln^2 x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int \frac{1}{2} x^2 d \ln^2 x = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \int x \ln x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} \int \ln x dx^2 = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} \int x^2 d \ln x = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{2} \int x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C
 \end{aligned}$$

16、令 $\sqrt{2x-1}=t$,

$$\text{则原式} = \int_0^2 \frac{t^2}{4+t^2} dt = \int_0^2 \frac{t^2+4-4}{4+t^2} dt = \int_0^2 (1 - \frac{4}{4+t^2}) dt = 2 - 2 \arctan \frac{t}{2} \Big|_0^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$$

17、平面 Π 的法向量 $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \vec{i} = (1, 2, 3) \times (1, 0, 0) = (0, 3, -2)$,

直线方程: $0(x-1) + 3(y-1) - 2(z-1) = 0$ 即 $3y - 2z - 1 = 0$.

18、 $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x f_1' + 2x f_2'$

(待完善)