★★★专转本高等数学 150 分之重点题型总结★★★

1.无穷小阶的比较

（1） 需要具备的基础知识

① 无穷小阶的基本概念

② 等价无穷小的替换公式

尤其注意：$(1+x)^{\alpha}-1 : \alpha x$

③ 极限的计算能力

（2） 题型

例 1（基本题型）2013 年第 1 题

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{2x(1+x)}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$

例 2（找不同）当 $x\to 0$ 时，下列无穷小中与 x 不等价的是 (　　)

$A.\ x-10x^2$　$B.\ \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

$C.\ \sin(2\sin x+x^2)$　$D.\ e^x-2x^2-1$

例 3（找不同）冲刺班 P7 页例 1.6-2

$x^2, 1-\cos x, \sqrt{1-x^2}-1, x-\tan x$

解题方法：与 x^k（幂函数）做商的极限。

例 4（求参数）2010 年第 1 题

解题方法：转化为已知函数极限存在，求函数中的参数。

例 5（求参数）冲刺班 P9 页例 1.7-4

例 6（求参数）求 a,b 的值，使当 $x\to 0$ 时，

$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小

例 7（求参数）冲刺班 P146 页综合演练六第 1 题

2. 导数的定义

（1）需要具备的基础知识

①导数的原始定义：两个

备注：定义 1 **变化多端**，定义 2 不能变（除了构造定义外，还用在分段函数求导）

②极限的计算能力。

③连续与可导的概念

（2）例题

定义 1 的构造题

例 1.2008 年第 2 题

例 2.2011 年第 2 题

例 3. 2003 年第 1 题

例 4.冲刺班 P13 页例 1.9-2

定义 2 的构造题

备注：若题目中出现“f（0）=0，f ‘（0）=1”类似的字样，则考虑使用定义 2，切忌乱用罗比达法则

例 5.已知 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1?$

例 6.冲刺班 P155 页综演十第 3 题（题目有误）

例 7.2013 年第 6 题

例 8.　设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2^{f(x)}-1}=1$，则 $f'(0)=?$

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2^{f(x)}-1}=1$，且 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}[2^{f(x)}-1]=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

又因为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，即在 x=0 处连续

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2^{f(x)}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{f(x)\ln 2}=-\frac{1}{2\ln 2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{f(x)}$$

$$=-\frac{1}{2\ln 2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}=1$$

$$ze:\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}=-2\ln 2$$

$$yinwei:\lim_{x\to 0}x=0$$

$$suoyi:\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0=f'(0)$$

提示：等价无穷小代换公式 $a^x-1 : x\ln a \quad (x\to 0)$

例 9.　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x^3)-f(0)}{x^3}$$
$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$$

补充 1：导数定义 2 在分段函数求导中的应用

（1）判定或利用分段点可导

分段函数的类型：

$$\begin{cases} f(x), x>a \\ A, x=a \\ g(x), x<a \end{cases}\quad \begin{cases} f(x), x\ge a \\ g(x), x<a \end{cases}\quad \begin{cases} f(x), x\ne a \\ A, x=a \end{cases}$$

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x},x>0\\ ax+b,x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a，b 的值。

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x},x>0\\ x^2, \quad x\le 0\end{cases}$，判定 f（x）在 x=0 处是否可导。

（2）分段函数求导函数

方法：分段点以外的函数用求导法则，分段点判定是否可导。

例 3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x},x>0\\ x^2, \quad x\le 0\end{cases}$，求 $f'(x)$

例 4.设 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\ge 0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$，求 $f'(x)$

例 5.设

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)\arctan\dfrac{1}{x-2},x\ne 2\\ 0, \quad x=2\end{cases}$$，求 $f'(x)$.

补充 2：幂指函数求导

方法：对数求导法（取自然对数法）

例 6（2002 年第 23 题）

3.积分的简单混合计算（导数、原函数、不定积分等）

（1） 需要具备的基础知识

① 三种不同描述表达同一含义

A. F（x）是 f（x）的一个原函数；

B. $f(x)=F'(x)$

C. $\int f(x)dx=F(x)+C$

② 两个互逆运算

A. $\left[\int f(x)dx\right]'=f(x)$（无论被积函数多么复杂）

B. $\int f'(x)dx=f(x)+C$（其中 x 为同一“函数”，即实际公式为：$\int f'(u)du=f(u)+C$）

③ 积分计算能力

备注：$f'(x),f''(x)$ 等有时需要看做一个函数而已。

（2） 例题

例 1.2009 年第 5 题

$$则\int f'(2x+1)dx=\frac{1}{2}\int f'(2x+1)d(2x+1)$$
$$=\frac{1}{2}f(2x+1)+C$$
$$f(x)=F'(x)=[\ln(3x+1)]'=\frac{3}{3x+1}$$
$$\int f'(2x+1)dx=\frac{1}{2}\frac{3}{3(2x+1)+1}+C=\frac{3}{12x+8}+C$$

例 2.2008 年第 10 题

例 3.2006-2007 年第 4 题

例 4.2011 年第 15 题

$$\int\frac{f(x)}{x}dx=\int\frac{2x\sin x+x^2\cos x}{x}dx=\int(2\sin x+x\cos x)dx$$
$$=-2\cos x+\int xd(\sin x)$$
$$=-2\cos x+x\sin x-\int\sin xdx$$
$$=-2\cos x+x\sin x-(-\cos x)+C=x\sin x-\cos x+C$$

$$\int f'(x^3)dx=x^3+C$$
$$f'(x^3)=3x^2$$

例 5.已知 $f'(x^3)=3x^2=3(x^3)^{\frac{2}{3}}$，求 $f(x)=?$

$$f'(x)=3x^{\frac{2}{3}}$$
$$f(x)=\int 3x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$$

补充 1：变上限积分函数

（1） 定义及来源

（2） 性质（求导、存在的价值）

备注：针对定积分而言 x 是常数，t 是变量。

例 1.2007 年第 5 题、2008 年第 3 题、2009 年第 8 题、2010 年第 3 题、2011 年第 8 题

例 2.2001 年第 12 题、2002 年第 16 题、2004 年第 14 题

例 3.2004 年第 22 题、2012 年第 22 题

备注：该类题最终转化为求微分方程，并且初始条件隐藏在已知等式中（取下限）。

例 4.（抽象的二重积分）2006 年第 24 题

补充 2：广义积分（反常积分）

（1）定义及类型

无穷区间上的广义积分、*无界函数的广义积分（瑕积分）

（2）计算

A.选择填空

与普通定积分计算几乎没有区别

B．计算题

注意解题格式（极限形式）

备注：对于

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \int_a^b f(x)dx (x \neq c, a < c < b)$ 都要分成两个广义积分求解。

例 1.2012 年第 11 题 2001 年第 16 题

例 2.其它。

4.函数的连续性及间断点

（1）需要具备的基础知识

①极限值等于函数值，$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，即左极限=右极限=函数值

②间断点的定义（类型）

备注：函数的间断点不能是端点，不能是定义域“以外”的点。

（2）例题

讨论或证明函数在某点处的连续性（往往与可到导性结合），多为已知连续（可导）求参数

例 1.2013 年第 7 题

例 2.2009 年第 3 题

求函数的间断点并判断其类型

备注：第一步找间断点（没有定义的一定是，分段函数的分断点可能是），

第二步利用左右极限判断其类型。

例 3.2012 年第 2 题

例 4.2013 年第 3 题

例 5.2011 年第 23 题

例 6.基础班课件

设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, x > 0 \\ \ln(1+x), -1 < x \leq 0 \end{cases}$ 指出 $f(x)$ 的间断点，并判断间断点的类型。

5.级数敛散性的判定

（1）需要具备的基础知识

①级数的定义

②级数敛散性的性质

③级数发散的充分条件

④　常见级数的敛散性（除了三种常见的，还应记住更多“常见的具体的”）

⑤　正项级数收敛性判别法

A.　比较法（一般比较法、极限形式比较法（关键词：等价无穷小））

B.　比值法

⑥　交错级数

A.　收敛性判定

B.　条件收敛与绝对收敛

备注：都是收敛，只是收敛的程度不同。

（2）例题

备注：肯定法、排除法、举特列（反例、针对抽象级数）、推广的调和级数判定方法

含有 ln、sin、tan 等初等函数的级数要利用等价无穷小代换成其它级数（它们具有相同的敛散性）

例 1.2013 年第 5 题（与往年不同，需要时间）

例 2.2012 年第 6 题（肯定法）

例 3.2010 年第 4 题（排除法）

例 4.2009 年第 6 题（讨论一个级数的敛散性）

例 5.冲刺班 P138 页第 6 题

例 6.2006 年第 5 题

例 7.2005 年第 6 题

6.求幂级数的收敛域

（1）需要具备的基础知识

①系数模比值法

②级数（常数项）敛散性的判定

（2）例题

备注：一共分四种不同情形，缺项级数利用系数模比值法求出半径后开方（立方、…）

例 1.2013 年第 12 题

例 2.2012 年第 12 题

例 3.冲刺班 P140 页第 12 题

例 4.冲刺班 P142 页第 11 题

例 5.求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2x+1)^n$ 的收敛域

例 6 冲刺班 P51 页例 1.40-1、1.40-2、1.40-3

7. 幂指函数求极限（或求导）

（1）需要具备的基础知识

①对数的运算性质

②取自然对数法

③重要极限的推广公式

（2）例题

例 1.2011 年第 7 题

例 2.2010 年第 7 题

例 3.2009 年第 7 题

例 4.冲刺班 P53 页例 2.1-2，2.1-3

例 5.2012 年第 9 题

例 6.2002 年第 23 题

8. 定积分与二重积分的化简

（1）需要具备的基础知识

①熟练掌握一元函数奇偶性的判定

②定积分的计算能力

③养成观察积分区间以及积分区域是否对称的习惯。

④一个递推公式

⑤熟悉定积分与二重积分的几何意义

（2）例题

备注：把函数和的定积分（二重积分）变成定积分（二重积分）的和

例 1.2011 年第 11 题

例 2.2010 年第 9 题

例 3.冲刺班 P30 页 1.23-2

例 4.2006 年第 6 题

例 5.2005 年第 5 题

9、空间向量的简单混合计算

（1）需要具备的基础知识

①向量的基本概念（定义、模、夹角、位置关系判定、坐标及其运算（加法、数乘、点乘、叉乘））

（2）例题

例 1. 2012 年第 10 题（几何）

例 2. 2009 年第 9 题（坐标）

例 3. 2013 年第 8 题（坐标）

10、多元函数的偏导数及全微分（一阶）

（1）需要具备的基础知识

①一元函数的求导法则

②全微分的定义

③多元隐函数求偏导的公式法

备注：注意偏导函数与具体点的偏导数值的区分，对于隐函数求具体点处的偏导数值（或全微分），要将已知点 (x_0, y_0) 带入原方程得到 z_0

（2）例题

例 1. 2012 年第 4 题（显函数）

例 2. 2011 年第 4 题（隐函数）

例 3.　设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}) = 0$ 确定，其中 f 是可微函数，则 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ 等于（　）

A、$-z$　　B、z .　C、$-y$　　D、y

例 4 设函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $F(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0$ 确定，证明 $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy$

11、微分方程的基本概念及简单计算

（1）需要具备的基础知识

①微分方程的基本概念（定义、阶、解、初始条件（针对特解））

②一阶微分方程（类型（3 个）、解法）

③二阶微分方程（齐次通解、非齐次特解形式）

④线性微分方程解的构成（一阶或二阶（主要针对非齐次））

（2）例题

例 1. 略

例 2. 略

例 3. 略

例 4.冲刺班教材 P143 页第 12 题

例 5.

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个不同的特解，则 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ $(c_2, c_2$ 任意常数$)$　（ B　）例 6

$A.$ 必是方程的通解 $B.$ 必是方程的解

C 必是方程的特解 D 不一定是方程的解

$y'' + y' = x^2 + 1$ 的待定特解 $y^* =$（C　）

$A. x(Ax^2 + B), B. Ax^2 + Bx + c,$

$C. x(Ax^2 + Bx + c), D. x^2(Ax^2 + Bx + c)$

12、其它（个人根据实际情况总结）

每年 12 题选择与填空，至少会出现 1-2 题“非常规”题，考察我们的基本知识。

13-20 计算题（要学会把试卷当成草稿纸）

（1）需要注意的环节

①极限计算：在每一次使用罗比达法则前要尽量地等价无穷小代换及“边做边代入”，并且敢于使用罗比达法则。

②参数方程求导、一元或二元隐函数求导（偏导）：注意区分导（偏导）函数与具体点处的导（偏导）数值的解法。

③-④不定积分、定积分：对于含有三角函数的积分要加强训练。（导数表、积分表、三角函数公式（倒数关系、1 的关系、倍角公式等））

⑤直线或平面的方程：学会找“点”与“向量”

A.点：已知、交点、原点（平面包含坐标轴）、平面包含一条直线（已知（点向式），任意点（交面式））。

B 向量：法向量、方向向量（直接得到，间接得到（做叉乘））、两个点（已知两个点，一个已知点和一个任意点）、坐标轴 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$，，做叉乘。

备注：除了所谓的“找出两个向量做叉乘”的题目外，还要学会其它类型及其方法，以及不能使用“找出两个向量做叉乘”。例如：给出直线或平面的夹角等条件，可以使用一般式求平面的方程等。（2011 年第 17 题）

⑥抽象复合函数求偏导：这里强调的应该是方法，即抽象复合函数求偏导的方法，改成“求含有抽象复合函数的多元函数求偏导”更为准确。

⑦二阶常系数非齐次线性微分方程：注意一些间接的综合的题目。另外，还要注意求满足初始条件的特解题。

⑧二重积分的计算：直角坐标系和极坐标系。

（2）例题

例 1.略

例 2.略

例 3.略

例 4.略

例 5.　冲刺班教材 P136 页第 17 题（不能使用两个向量做叉乘）

例 6.冲刺班教材 P141 页第 18 题（已知平面的给出本身就是一个题）

例 7.冲刺班教材 P138 页第 17 题（直线与平面的交点问题）

例 8.纯粹抽象复合函数求偏导

例 9.2012 年第 18 题

例 10.2011 年第 18 题

例 11.颠倒求偏导次序以及 f12=f21

例 12.二阶微分方程基本题型

例 13.冲刺班教材 P136 第 20 题

例 14 冲刺班教材 P139 页第 22 题

例 15.冲刺班教材 P141 页第 20 题

例 16.含有变上限积分函数的等式（初始条件隐藏在等式中（x 取下限））

例 17 冲刺班教材 P154 页第 20 题

例 18.直角坐标系下计算二重积分，分 4 种题型：1.X-型（习惯）2.X-型或 Y 型（计算方便为主）3.必须是 X（Y）-型（被积函数的形式确定如何选择）4.X-型（积分区域只是 X-型）或 Y-型（积分区域只是 Y-型）

例 19 极坐标系下计算二重积分

21、不等式证明及方程根的讨论

（1）需要具备的基础知识

一、不等式证明

①利用函数的单调性

②最值法（单峰原理、极值的第二充分条件）

③图像法（利用函数的整体性质，如极值等）

备注：严格不等式一般利用①，且一般使用两次；非严格不等式一般利用②。

二、方程根的讨论

①零点定理（至少一个）

②函数单调性（只有一个）

③图像法（利用函数的整体性质，如极值等）

备注：A.零点定理是不包括端点的。

B.零点定理可以多次使用（至少两个以上）。

C.不等式证明和方程根的讨论都需要构造函数，都要注意区间的各种不同形式，包括无穷区间（推广的零点定理）。

（2）例题

例 1. 2012 年第 23 题

例 2. 2013 年第 23 题

例 3. 2011 年第 22 题

例 4. $(x+1)\ln x < x-1, 0<x<1$（利用右端点）

例 5. 2007 年第 24 题（不能使用最值法，讨论区间）

例 6. 证明：当 $0<x<\pi$ 时，$\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$

证明：令 $f(x)=\sin\frac{x}{2}-\frac{x}{\pi}$

则 $f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}$，$f''(x)=-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}<0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上为凸函数

又 $f(0)=f(\pi)=0$，所以在 $0<x<\pi$ 上，$f(x)>0$

，即原不等式成立。

22、函数连续性及可导性讨论与证明

（1）需要具备的基础知识

①函数在某点处连续的定义及性质

②函数在某点处可导的定义及性质

③导数定义 1 或 2 的构造

④极限理论及计算

⑤分段函数求导

（2）例题

例 1. 2009 年第 23 题（经典题型）

例 2. 其它所有历年真题

例 3. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$，其中 $f(t)$ 是连续函数，且 $f(0)=0$，若 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 c 的值。

例 4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，对任意的 x 有 $f(x+2)=2f(x)$，求 $f'(2)$。

例 5. .设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，$g(x)$ 具有二阶连续的导数，并且 $g(0)=1$

（1）试确定常数 a 的值，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

（2）求 $f'(x)$。

例 6.　设 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=2$。对一切实数 x,h 满足关系式 $f(x+h)=e^{x}f(h)+e^{h}f(x)$。证明：（1） $f(0)=0$　(2) $f(x)$ 在任一点 $x=a$ 处均可导，且 $f'(a)=f(a)+2e^{a}$

x	(-∞,-3)	-3	(-3,0)	(0,+∞)
y''	-	0	+	+
y	凸	拐点	凹	凹

例 7.　设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)\neq 0$，又设 $u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{u(x)}$

例 8.　设函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且满足条件：

（1） $f(x+h)=f(x)g(h)+f(h)g(x)$；

（2） $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0,g(0)=1,f'(0)=1,g'(0)=0$

例 9.2011 年第 21 题

例 10. 冲刺班教材 P139 页第 24 题

例 11.　证明方程 $x^4-2x=4$ 在 $(-2,2)$ 内至少有两根。

例 12.证明方程 $x^3-9x-1=0$ 有且仅有三个实根

例 13.　方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根

例 14.　设常数 $k>0$, 证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-k$,在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个正根.

例 15. 冲刺班教材 P155 页第 23 题

23、定积分的应用

参见冲刺班教材，总结的十分全面！

24、导数的应用

（1）需要具备的基础知识

熟练掌握给出一个函数求出它的所有关于导数应用的知识。

（2）例题

例 1.标准题型（对所给函数求单调区间、极值、最值……）

设函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$

（1）求函数的单调区间、极值；（2）求函数图形的凹凸区间，拐点及渐近线方程

解：函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

x	(-∞,-2)	-2	(-2,0)	(0,+∞)
y′	-	0	+	-
y	↘	极值	↗	↘

由 $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ 得 $f'(x)=-\dfrac{x+2}{x^3}$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=-2$

列表讨论得

由表可知单调增区间为(-2,0)，单调减区间为(-∞,-2)，(0,+∞)；

$f(-2)=-\dfrac{1}{4}$ 为极小值；

因为 $f''(x)=\dfrac{2x+6}{x^4}$，令 $f''(x)=0$ 得 $x=-3$，列表讨论得

有表可知拐点为 $(-3,f(-3))$，即点 $(-3,-\dfrac{2}{9})$ 为拐点；

$(-\infty,-3)$ 内是凸区间，在 $(-3,0),(0,+\infty)$ 是凹区间。

注：本题虽然只有一个极值点和拐点，但是定义域中没有“0”这一点，所以使用列表讨论比较好。

例 2.已知某点处取得极值或是拐点，求函数中的参数（注意极值或拐点本身也是曲线上的点）

例 3.求所给函数的某一种性质（如**渐近线（个数及种类）**、极值或拐点）

例 4.图像描述 f　代数描述

24′、其它

请自己总结！